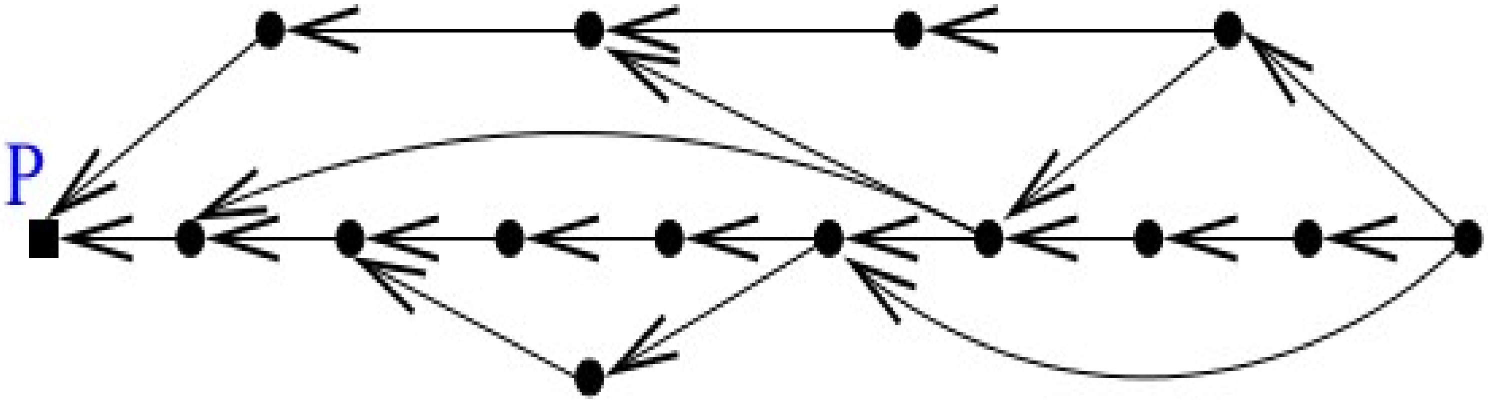
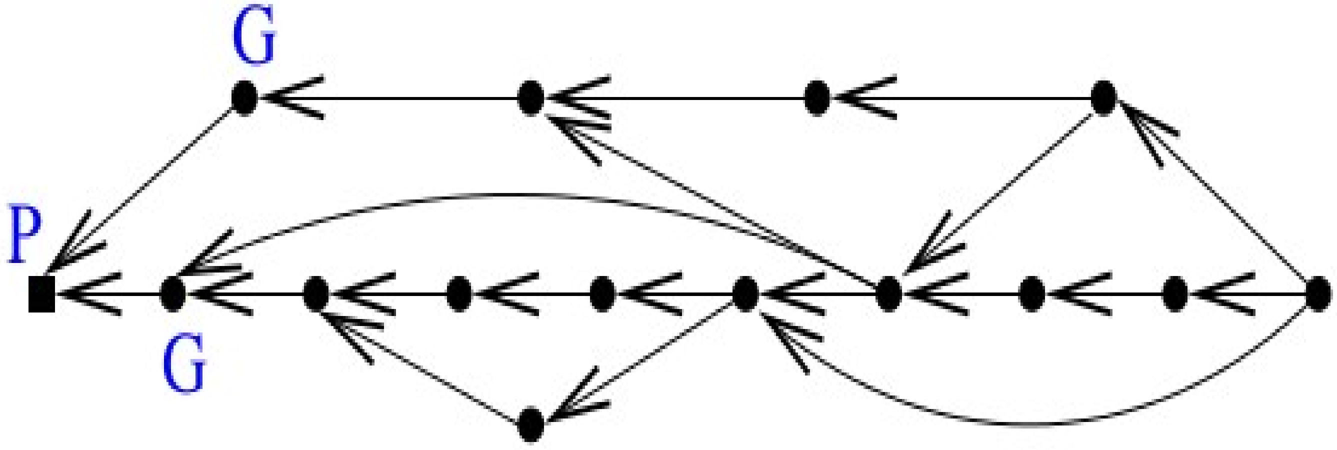
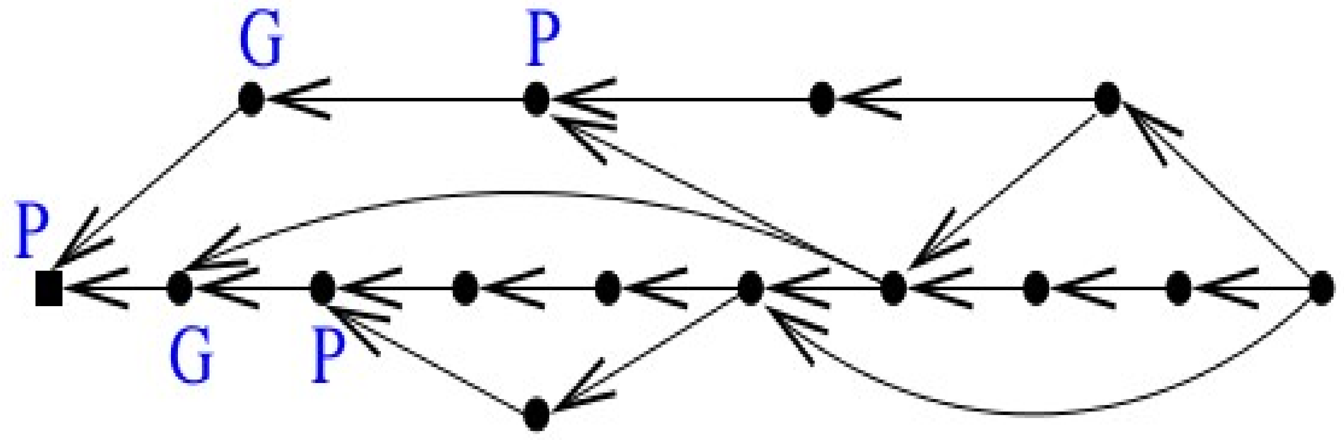
Toute situation est soit perdante, soit gagnante



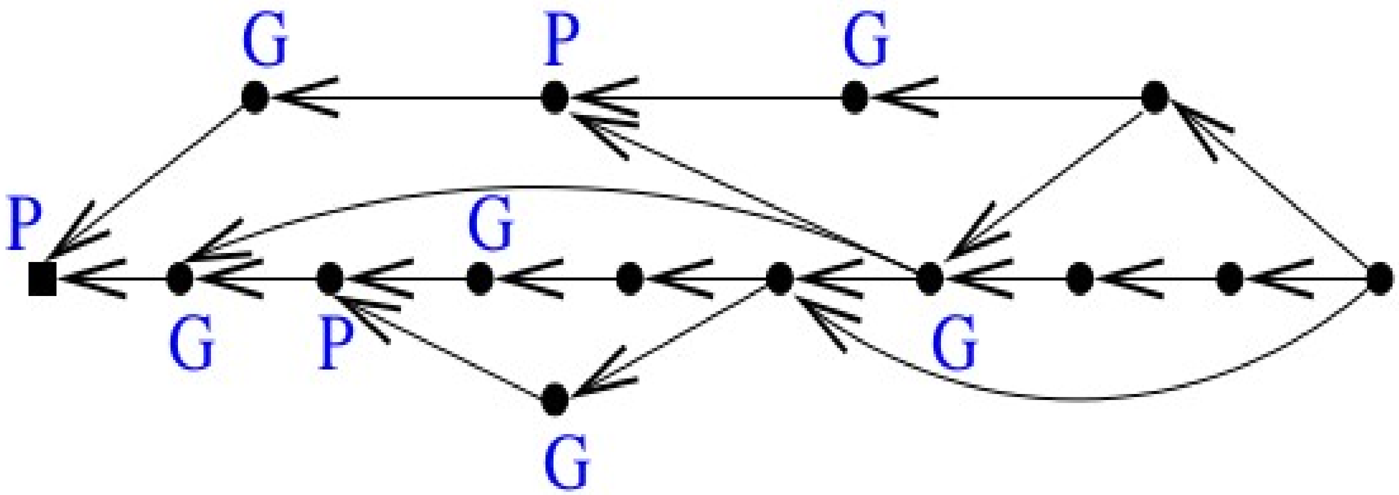
Toute situation est soit perdante, soit gagnante



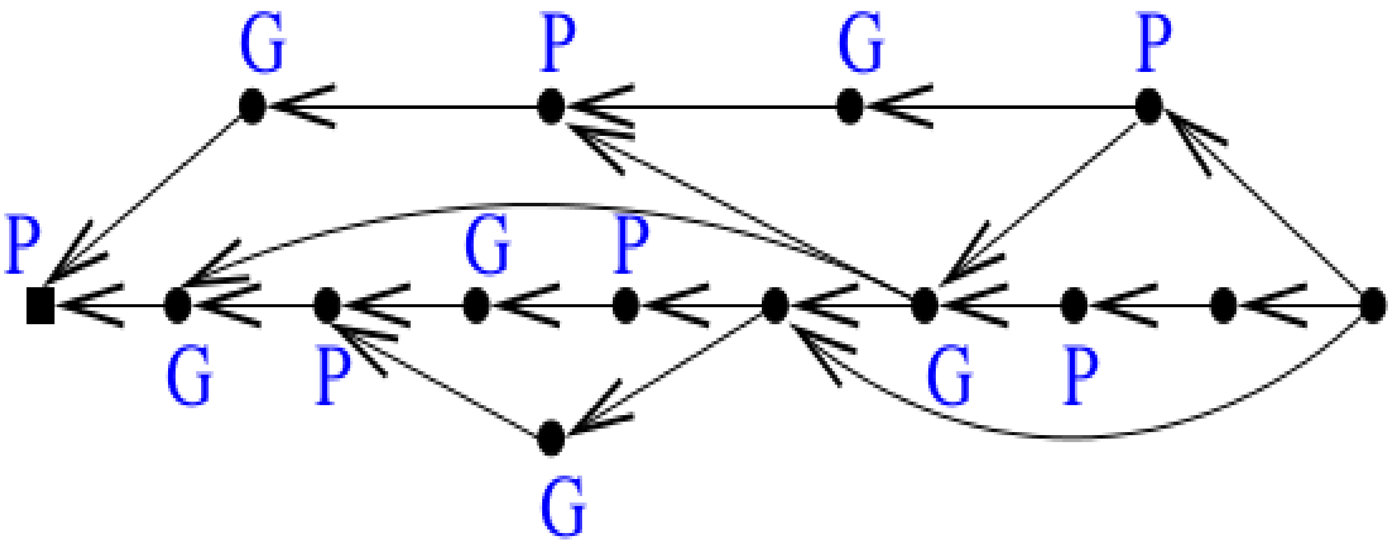
Toute situation est soit perdante, soit gagnante



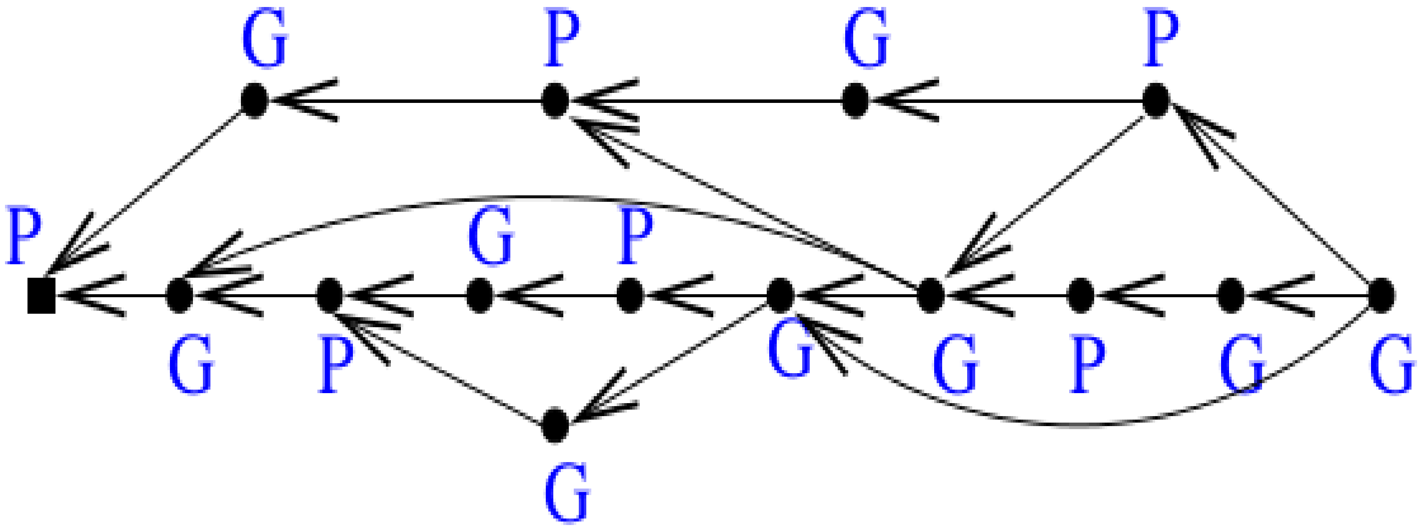
Toute situation est soit perdante, soit gagnante



Toute situation est soit perdante, soit gagnante



Toute situation est soit perdante, soit gagnante



Jeu de nim limité à plusieurs tas

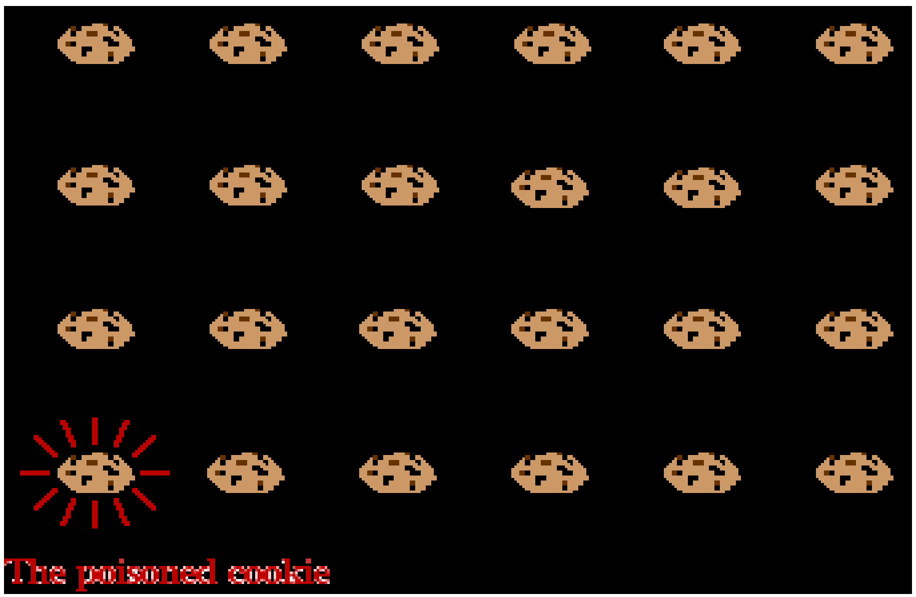
- Deux joueurs, et des pions, répartis en plusieurs tas distincts
- À tour de rôle, chaque joueur choisit un tas, et prend 1, 2 ou 3 pions dans ce tas
- Celui qui ne peut plus jouer a perdu

Étudier différents cas, en commençant par deux tas, pour décrire entièrement les situations gagnantes et perdantes, et définir une stratégie de jeu.

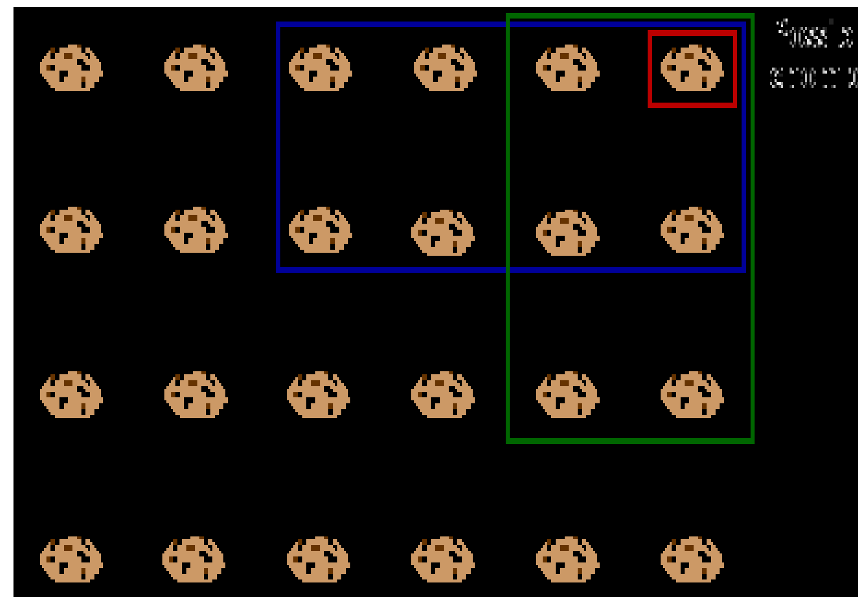
Jeu de nim limité à plusieurs tas : solution

- On définit
  - N1 := nombre de tas qui ont un nombre de pions de la forme 4n+1
  - N2 := nombre de tas qui ont un nombre de pions de la forme 4n+2
  - N3 := nombre de tas qui ont un nombre de pions de la forme 4n+3
- **Affirmation** : une position est perdante quand N1, N2, N3 sont tous pairs, ou sont tous impairs

Le jeu de Chomp



Situation initiale



Différentes prises possibles

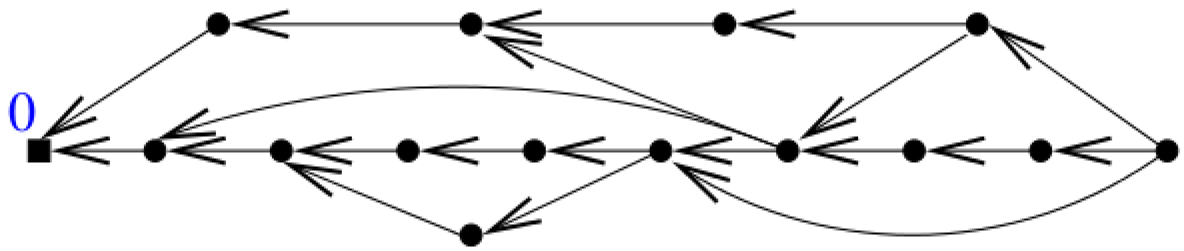
Jeu de Chomp

- **Théorème :** Celui qui se trouve devant une tablette rectangulaire est dans une situation gagnante
- **Démonstration** (par vol de stratégie) :
  - Supposons que la situation soit perdante
  - Si le premier joueur enlève le coin en haut à droite, le second est donc dans une situation gagnante.
  - Donc il peut jouer quelque chose et mettre le joueur 1 dans une situation perdante.
  - Mais alors, il suffisait au joueur 1 de jouer directement ce qu'a joué le joueur 2
  - La situation initiale est donc gagnante !
- On sait qu'on peut gagner, **mais on ne sait pas comment** !
- Décrire la stratégie gagnante dans le cas d'une tablette 4x3

Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

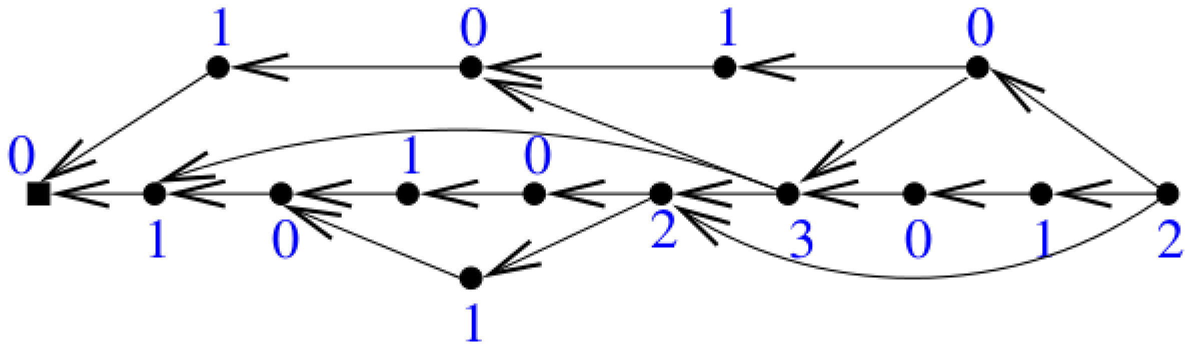
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de SG et situations perdantes

- Une situation d'un jeu est perdante si la valeur de la fonction de Sprague-Grundy en ce point est nulle.
- Exemple du jeu de Nim limité à un tas.
- Si on sait calculer la fonction de Sprague-Grundy du graphe correspondant à un jeu, on a analysé entièrement le jeu.

Jeu de déplacement sur une grille

- Considérons le jeu suivant :
  - On considère un damier. Au début du jeu, un pion est posé sur une case.
  - A tour de rôle, chaque joueur déplace le pion, soit vers le bas, soit vers la gauche.
  - Celui qui ne peut plus jouer a perdu.
- Calculer la fonction de Sprague-Grundy de ce jeu !

La fonction de Sprague-Grundy sur une grille

20	21	22	23	16	17	18	19	28	29	30	31	24	25	26	27	4	5	6	7	0
19	18	17	16	23	22	21	20	27	26	25	24	31	30	29	28	3	2	1	0	7
18	19	16	17	22	23	20	21	26	27	24	25	30	31	28	29	2	3	0	1	6
17	16	19	18	21	20	23	22	25	24	27	26	29	28	31	30	1	0	3	2	5
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	0	1	2	3	4
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	31	30	29	28	27
14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1	30	31	28	29	26
13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2	29	28	31	30	25
12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3	28	29	30	31	24
11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4	27	26	25	24	31
10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5	26	27	24	25	30
9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6	25	24	27	26	29
8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7	24	25	26	27	28
7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8	23	22	21	20	19
6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9	22	23	20	21	18
5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10	21	20	23	22	17
4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	20	21	22	23	16
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12	19	18	17	16	23
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	18	19	16	17	22
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14	17	16	19	18	21
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Somme de Nim

- On constate une structure particulière dans la grille précédente, matérialisée par les couleurs. Comprend que l'écriture binaire va jouer un rôle.
- C'est décrit par la somme de Nim :
- Pour calculer le nombre qui se trouve dans la colonne 9, et la ligne 5.
- On écrit ces deux nombres en binaire, et on fait une opération un peu particulière :

9 -> 1001

5 -> 0101

1100 -> 12

Le nombre de Grundy de la position (9,5) est 12

Somme de deux jeux

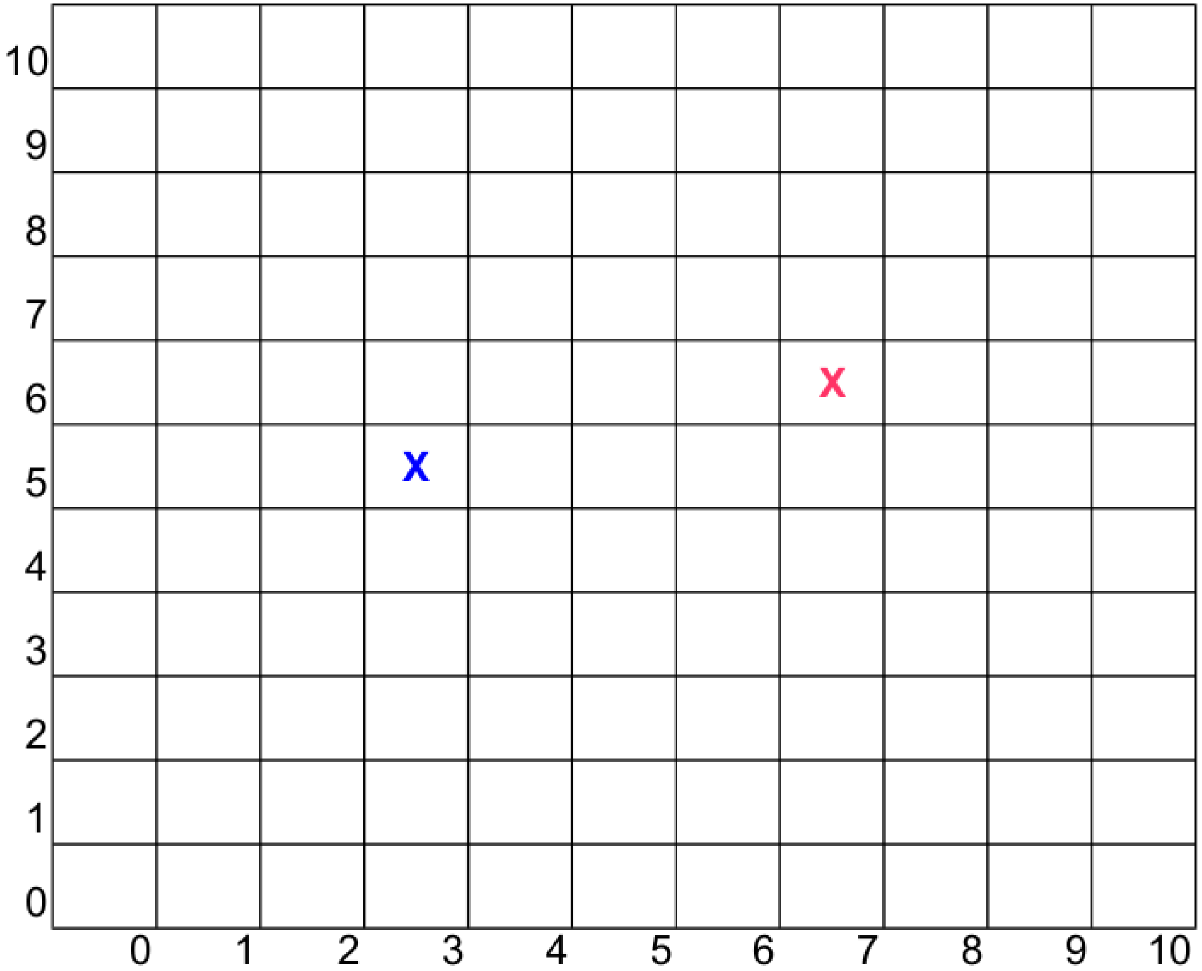
- On regarde deux jeux J1 et J2, décrits par des graphes G1 et G2.
- On considère un nouveau jeu J=J1+J2 défini par :
  - On met les deux jeux en parallèle. Une situation est donc un couple (x,y), où x est une situation de J1 et y est une situation de J2
  - A chaque coup, le joueur a le choix de jouer soit dans le jeu J1, soit dans le jeu J2
  - Celui qui n'a plus de possibilité de jouer a perdu
- Exemple : le jeu de déplacement sur une grille est la somme de deux jeux élémentaires. Lesquels ?
- Peut-on calculer la fonction de Grundy g de J en connaissant les fonctions de Grundy des deux jeux J1 et J2 ?

Déplacement de deux pions sur une grille.

- On considère deux pions sur une grille.
- Chaque joueur à tour rôle déplace un pion de son choix, vers le bas ou vers la gauche, d'autant de case qu'il le souhaite. On autorise que les deux pions soient sur la même case.
- Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

Déplacement de deux pions sur une grille.

- Dans cette situation, que choisissez vous ?



Fonction de Grundy de la somme de deux jeux

- **<u>Théorème de Sprague-Grundy</u>** : le nombre de Grundy de la position (x,y) du jeu J est égale à la somme de Nim du nombre de Grundy de la position x du jeu J1 et du nombre de Grundy de la position y du jeu J2
- Retour au jeu de déplacement d'un pion sur une grille.
  - Comprendre le tableau à la lumière du théorème.

Situation perdante pour la somme de deux jeux

- La somme de Grundy de deux nombres est nulle si, et seulement si, ces deux nombres sont égaux.
- Conséquence : une position (x,y) de jeu J, somme des jeux J1 et J2 est perdante si, et seulement si, les nombres de Grundy des positions x et y sont égaux.

Utilisation concrète de la théorie de Sprage-Grundy

Revenir sur les jeux suivants déjà rencontrés :

- Nim non limité à plusieurs tas (jeu de Marienbad)
- Nim limité à plusieurs tas
- Déplacement de deux pions sur une grille

Jeux plus difficiles à décrire

- Les jeux précédents, avec la règle « misère » :
  - Celui qui joue le dernier a perdu
- Le jeu de Nim-Fibonacci :
  - Un tas de pion
  - Le premier joueur peut prendre autant de pions qu'il le souhaite, mais pas tous
  - Un joueur peut prendre au plus le double de pions qu'a pris son adversaire au coup précédent
  - Celui qui ne peut plus jouer a perdu

Les nombres de Fibonacci

- 1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,...
- Les deux premiers nombres sont 1 et 2 et chaque nombre est la somme des deux précédents.

Numération de Zeckendorf

- Tout nombre s'écrit de manière unique comme somme de nombres de Fibonacci distincts et non consécutifs.
- Exemple : 99=89+8+2
  99=1*89+0*55+0*34+0*21+0*13+1*8+0*5+0*3+1*2+0*1
- On note 99-> 1000010010_Z (c'est la numération de Zeckendorf)

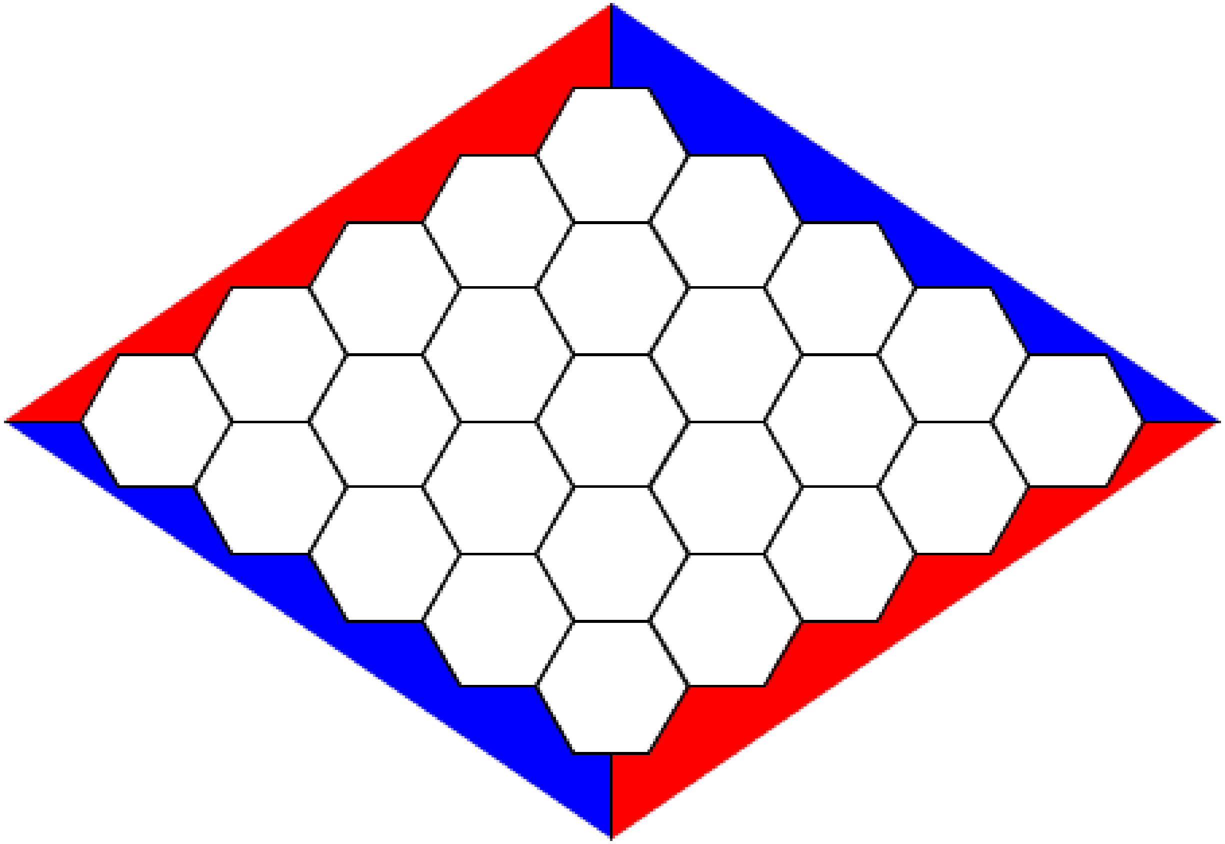
Solution de Nim-Fibonacci

- Si je commence a gagné, et si le nombre de pions devant moi est, soit 1, soit pas un nombre de Fibonacci, alors je gagne à coup sûr.
- Ma stratégie :
  - Écrire le nombre en numération de Zeckendorf ; cette écriture contient au moins deux 1
  - J'enlève à chaque fois le dernier 1 à droite
- En revanche, si, quand je commence, le nombre de pions devant moi est un nombre de Fibonacci autre que 1, mon adversaire a une stratégie gagnante.
- Exemple : vous êtes devant 99 pions. Que choisissez vous de faire ?

Un jeu non impartial : le jeu de Hex

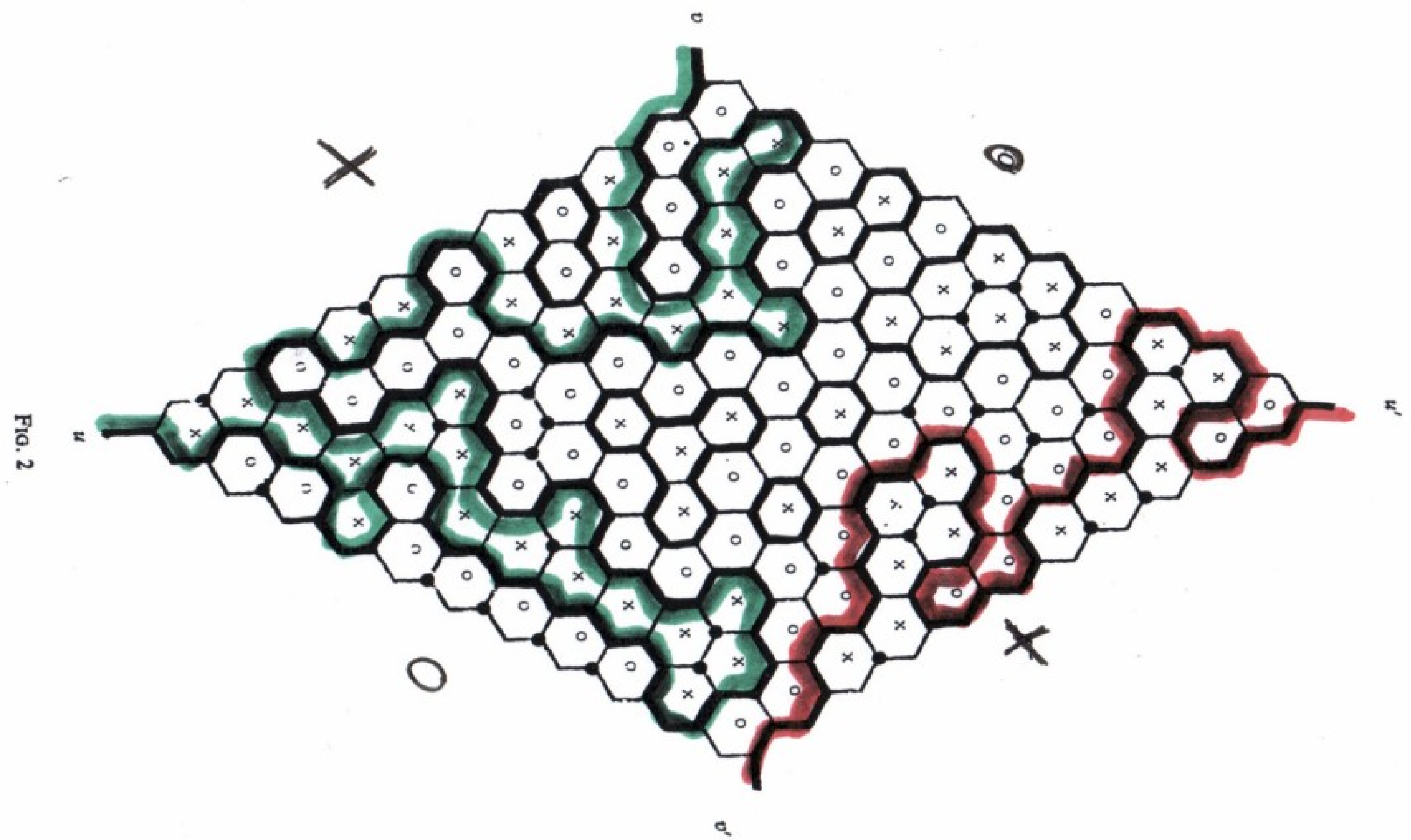
- Un damier en forme de losange, à cases hexagonales.
- Deux côtés opposés sont bleus, les deux autres sont rouges.
- Chaque joueur a des pions d'une couleur (bleu ou rouge) et met à chaque tour un pion dans une case encore inoccupée.
- Celui qui réussit à faire un chemin reliant les deux bords de sa couleur a gagné.

Le damier du jeu de Hex



Analyse du jeu de Hex

- Toute partie se termine nécessairement par la victoire d'un des deux joueurs



Analyse du jeu de Hex

- Le premier qui joue possède une stratégie gagnante.
- Mais on ne sait pas laquelle !
- Cela se prouve par un argument de vol de stratégie (comme pour le jeu de Chomp).