Du problème au théorème

Exemples tirés de la théorie des graphes

François Ducrot

`http://math.univ-angers.fr/∼ducrot/CSG/`

Présentation de l'exposé

But : Présenter un exemple de démarche mathématique, partant d'un problème, et aboutissant au développement d'une théorie, ayant bien d'autres applications.

Plan :

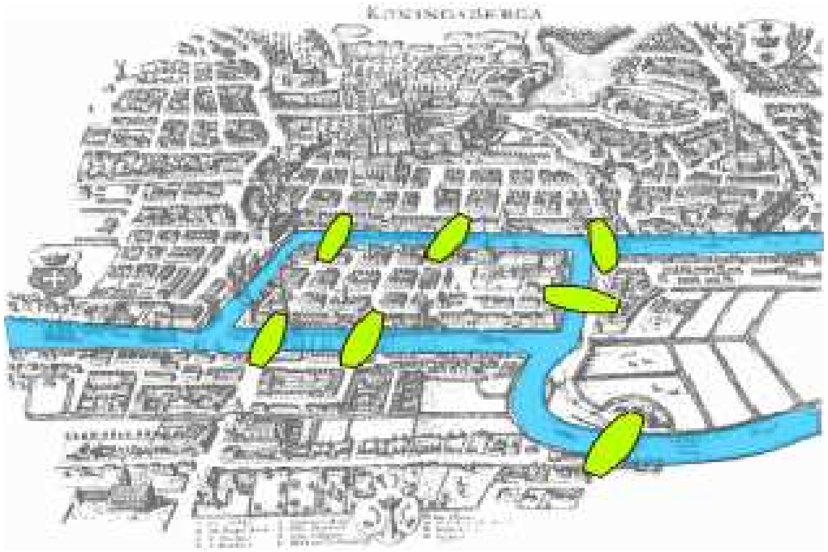
- Le problème des ponts de Königsberg
- Modélisation mathématique du problème
- Résolution du problème initial
- Prolongements mathématiques
- Prolongements algorithmiques

I. Le problème des ponts de Königsberg

La ville de Königsberg (Kaliningrad) est située sur les bords de la riviere Pregel en Prusse orientale. Elle en occupe les deux rives ainsi que deux iles. Au 18ème siècle, les 4 parties de la ville étaient réunie par 7 ponts, conformément au plan suivant:

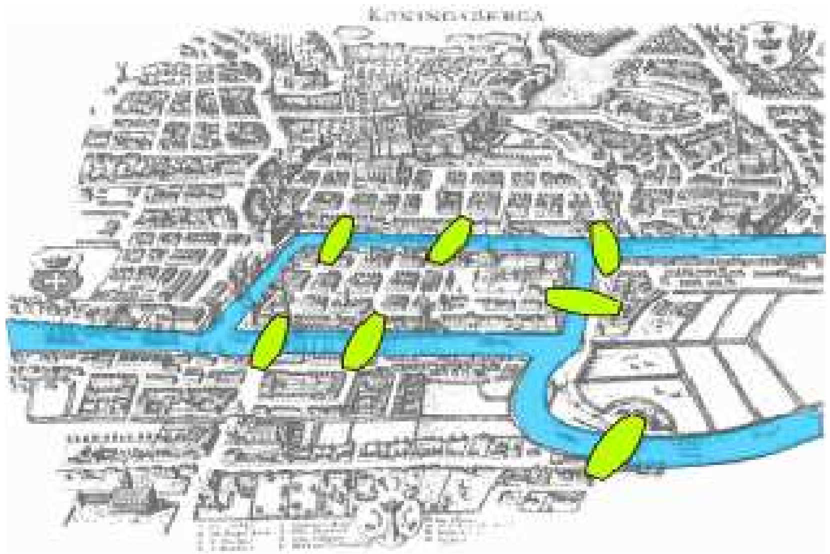
I. Le problème des ponts de Königsberg

La ville de Königsberg (Kaliningrad) est située sur les bords de la riviere Pregel en Prusse orientale. Elle en occupe les deux rives ainsi que deux iles. Au 18ème siècle, les 4 parties de la ville étaient réunie par 7 ponts, conformément au plan suivant:



I. Le problème des ponts de Königsberg

La ville de Königsberg (Kaliningrad) est située sur les bords de la riviere Pregel en Prusse orientale. Elle en occupe les deux rives ainsi que deux iles. Au 18ème siècle, les 4 parties de la ville étaient réunie par 7 ponts, conformément au plan suivant:



Question : peut-on faire une promenade en ville en passant une et une seule fois par chaque pont ?

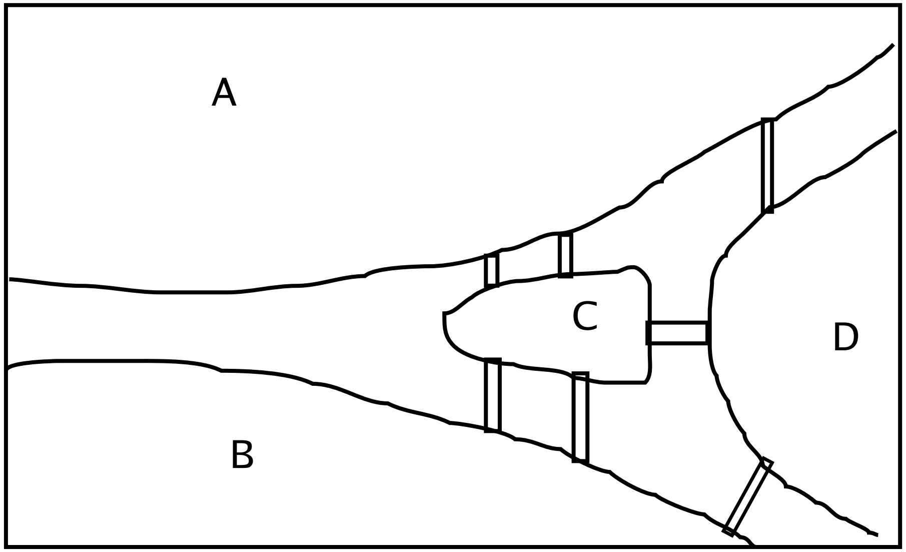
II. Modélisation du problème

On veut introduire des objets mathématiques permettant

- de décrire le plan de la ville, en ne gardant que les informations essentielles
- de traduire le problème initial en termes mathématiques.

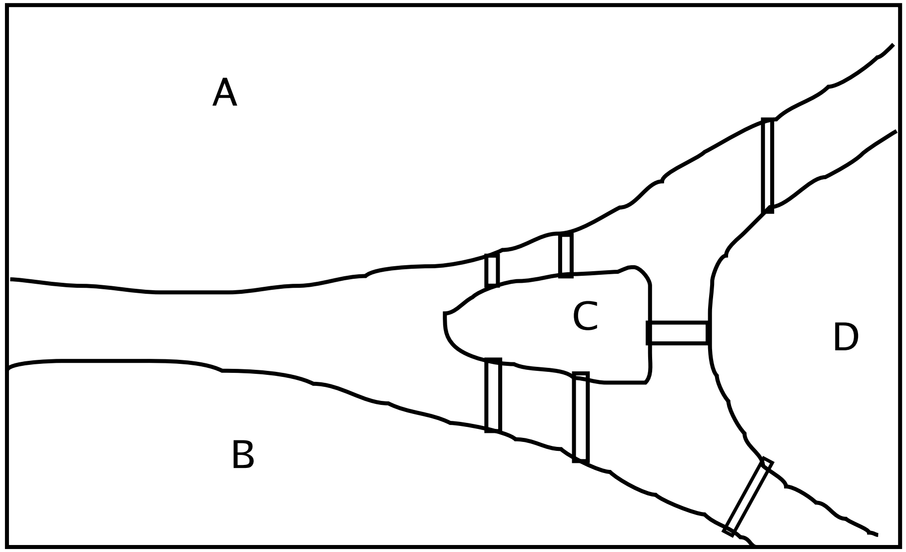
II.1. Décrire le plan de la ville

Première schématisation:
Quatre zones A, B, C, D
sept ponts qui les relient

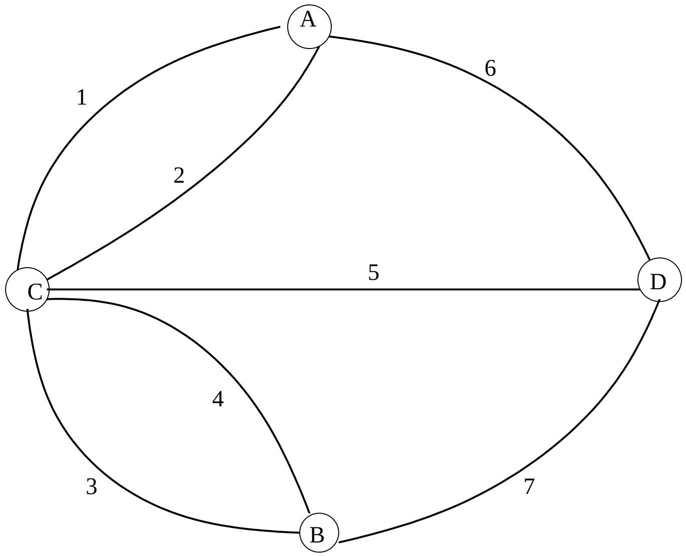


II.1. Décrire le plan de la ville

Première schématisation:
Quatre zones A, B, C, D
sept ponts qui les relient



Simplifions encore:
Quatre sommets et
sept arêtes



II.2. Un nouvel objet mathématique

L'objet mathématique sous-jacent est ici un graphe.
Pour pouvoir faire des mathématiques avec ce nouvel objet, il faut que la notion de graphe soit définie sans ambiguité:

II.2. Un nouvel objet mathématique

L'objet mathématique sous-jacent est ici un graphe.
Pour pouvoir faire des mathématiques avec ce nouvel objet, il faut que la notion de graphe soit définie sans ambiguité:

Définition

Un graphe G est la donnée de :

- un ensemble de sommets $\mathcal{S}$.
- un ensemble d'arêtes $\mathcal{A}$
- pour chaque arête i, l'ensemble s_i de ses sommets

II.2. Un nouvel objet mathématique

L'objet mathématique sous-jacent est ici un graphe.
Pour pouvoir faire des mathématiques avec ce nouvel objet, il faut que la notion de graphe soit définie sans ambiguité:

Définition

Un graphe G est la donnée de :

- un ensemble de sommets $\mathcal{S}$.
- un ensemble d'arêtes $\mathcal{A}$
- pour chaque arête i, l'ensemble s_i de ses sommets

Dans le cas du graphe des ponts de Königsberg, on prend $\mathcal{S} = \{A, B, C, D\}$ et $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. On a ici:
$s_1 = s_2 = \{A, C\}$, $s_3 = s_4 = \{C, B\}$,
$s_5 = \{C, D, \}$, $s_6 = \{C, D\}$, $s_7 = \{B, D\}$.

II.3. Chemin sur un graphe

Définition

Un chemin sur le graphe G est une suite

$$s_0 \;\; a_1 \;\; s_1 \quad \ldots \quad s_{n-1} \;\; a_n \;\; s_n$$

où les s_i sont des sommets et les a_i sont des arêtes reliant s_{i-1} à s_i.

Exemple :

II.3. Chemin sur un graphe

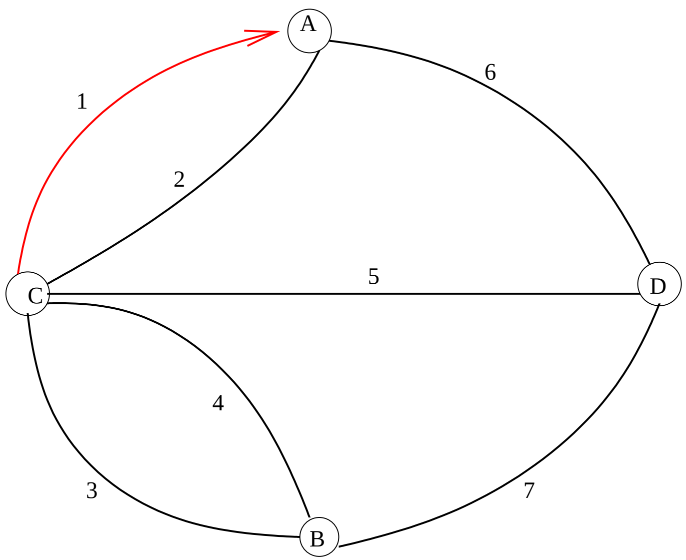
Définition

Un chemin sur le graphe G est une suite

$$s_0 \;\; a_1 \;\; s_1 \;\; \ldots \;\; s_{n-1} \;\; a_n \;\; s_n$$

où les s_i sont des sommets et les a_i sont des arêtes reliant s_{i-1} à s_i.

Exemple : $\quad C \;\; 1 \;\; A$



II.3. Chemin sur un graphe

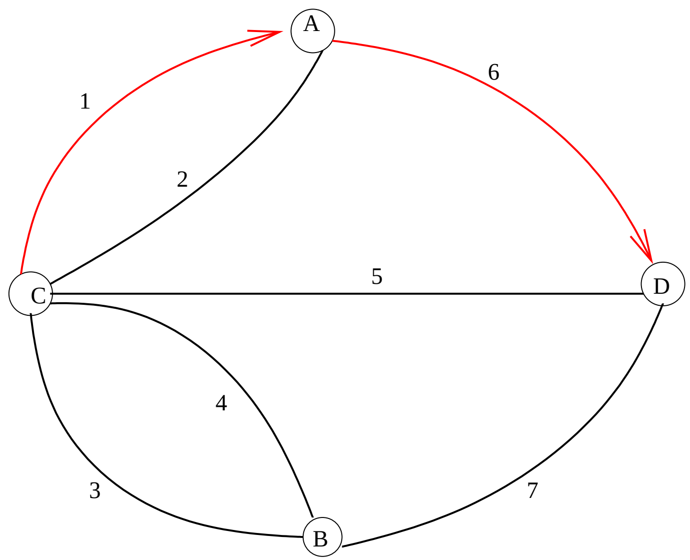
Définition

Un chemin sur le graphe G est une suite

$$s_0 \;\; a_1 \;\; s_1 \;\; \ldots \;\; s_{n-1} \;\; a_n \;\; s_n$$

où les s_i sont des sommets et les a_i sont des arêtes reliant s_{i-1} à s_i.

Exemple : $C \;\; 1 \;\; A \;\; 6 \;\; D$



II.3. Chemin sur un graphe

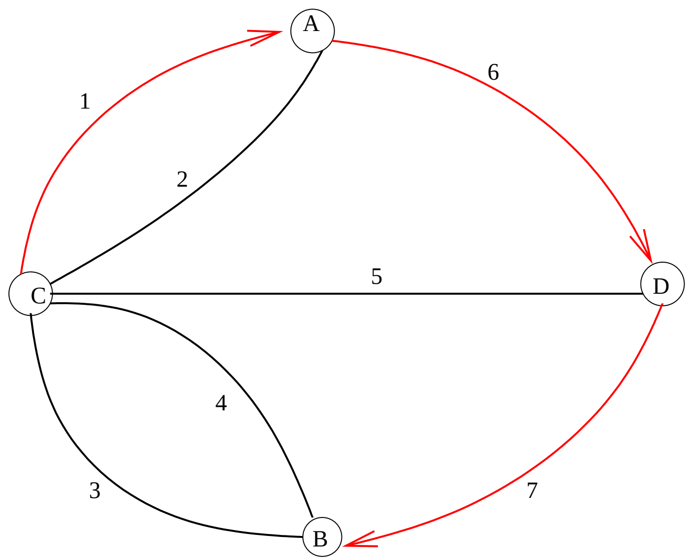
Définition

Un chemin sur le graphe G est une suite

$$s_0 \;\; a_1 \;\; s_1 \;\; \ldots \;\; s_{n-1} \;\; a_n \;\; s_n$$

où les s_i sont des sommets et les a_i sont des arêtes reliant s_{i-1} à s_i.

Exemple : $C \;\; 1 \;\; A \;\; 6 \;\; D \;\; 7 \;\; B$



II.3. Chemin sur un graphe

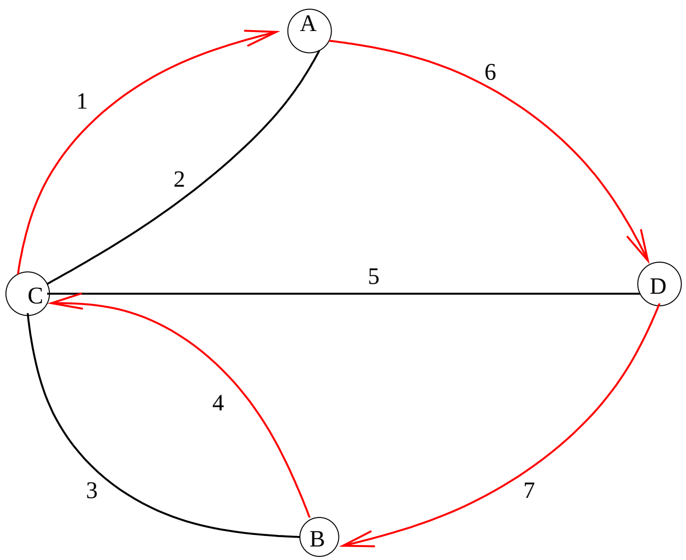
Définition

Un chemin sur le graphe G est une suite

$$s_0 \;\; a_1 \;\; s_1 \;\; \ldots \;\; s_{n-1} \;\; a_n \;\; s_n$$

où les s_i sont des sommets et les a_i sont des arêtes reliant s_{i-1} à s_i.

Exemple : $\quad C \;\; 1 \;\; A \;\; 6 \;\; D \;\; 7 \;\; B \;\; 4 \;\; C$



II.3. Chemin sur un graphe

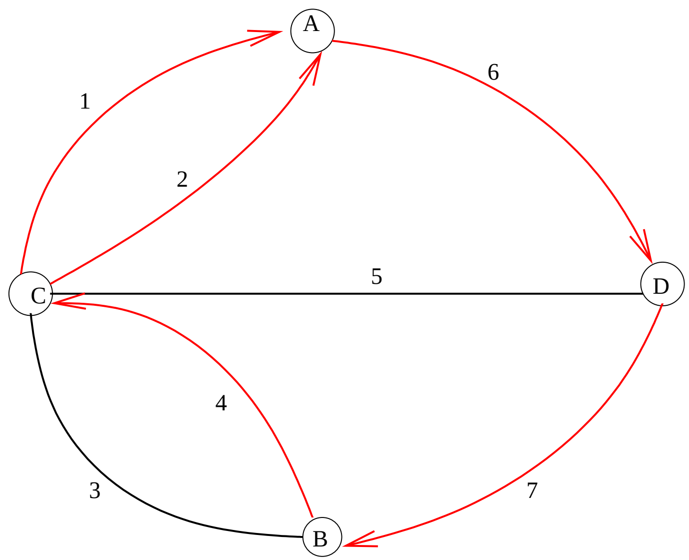
Définition

Un chemin sur le graphe G est une suite

$$s_0 \;\; a_1 \;\; s_1 \;\; \ldots \;\; s_{n-1} \;\; a_n \;\; s_n$$

où les s_i sont des sommets et les a_i sont des arêtes reliant s_{i-1} à s_i.

Exemple : $C \;\; 1 \;\; A \;\; 6 \;\; D \;\; 7 \;\; B \;\; 3 \;\; C \;\; 2 \;\; A$



II.4. Chemins eulériens sur un graphe

Définition

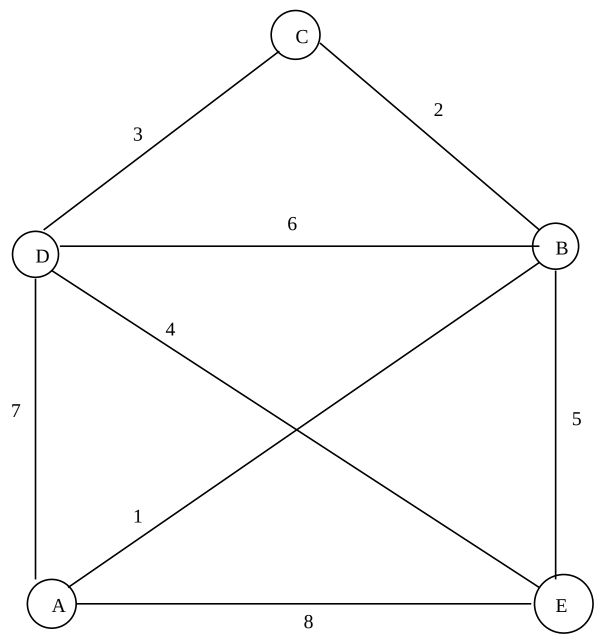
Un chemin eulérien sur un graphe G est un chemin tracé sur le graphe, qui utilise une et une seule fois chaque arête de G.

II.4. Chemins eulériens sur un graphe

Définition

Un chemin eulérien sur un graphe G est un chemin tracé sur le graphe, qui utilise une et une seule fois chaque arête de G.

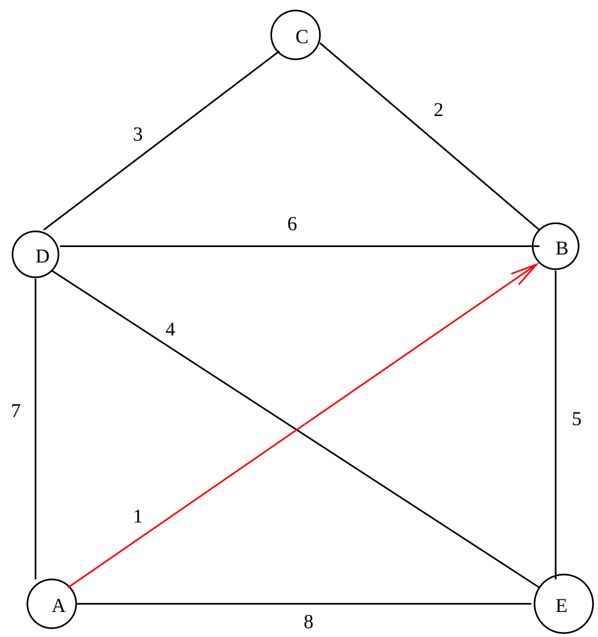
exemple: graphe de l'enveloppe ouverte



II.4. Chemins eulériens sur un graphe

Définition
Un chemin eulérien sur un graphe G est un chemin tracé sur le graphe, qui utilise une et une seule fois chaque arête de G.

exemple: graphe de l'enveloppe ouverte

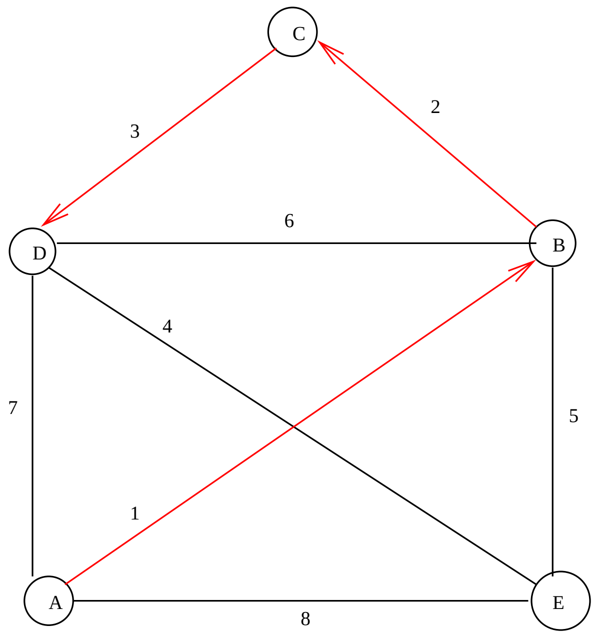


$$A \; 1 \; B$$

II.4. Chemins eulériens sur un graphe

Définition
Un chemin eulérien sur un graphe G est un chemin tracé sur le graphe, qui utilise une et une seule fois chaque arête de G.

exemple: graphe de l'enveloppe ouverte



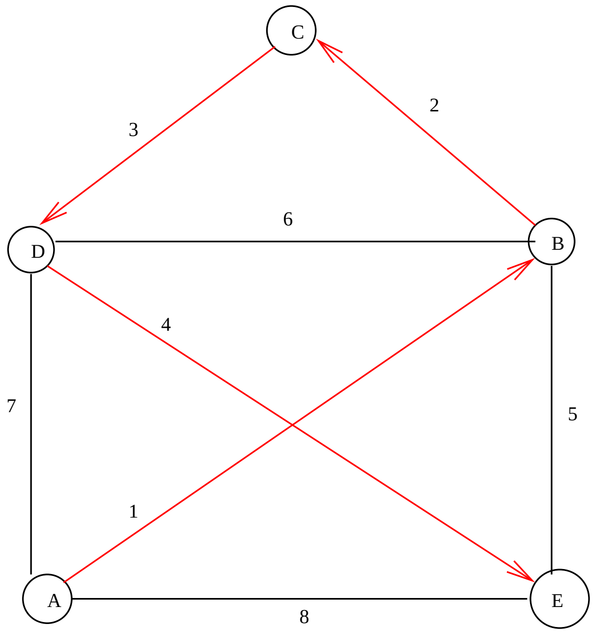
$$A \ 1 \ B \ 2 \ C \ 3 \ D$$

II.4. Chemins eulériens sur un graphe

Définition

Un chemin eulérien sur un graphe G est un chemin tracé sur le graphe, qui utilise une et une seule fois chaque arête de G.

exemple: graphe de l'enveloppe ouverte

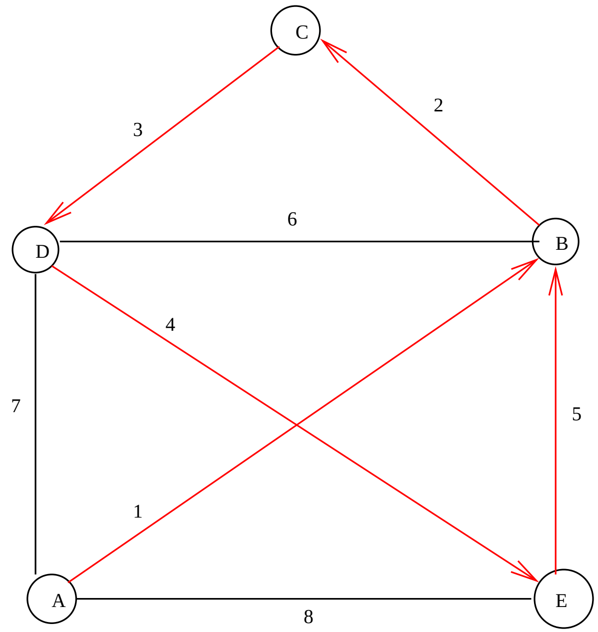


$$A \; 1 \; B \; 2 \; C \; 3 \; D \; 4 \; E$$

II.4. Chemins eulériens sur un graphe

Définition
Un chemin eulérien sur un graphe G est un chemin tracé sur le graphe, qui utilise une et une seule fois chaque arête de G.

exemple: graphe de l'enveloppe ouverte



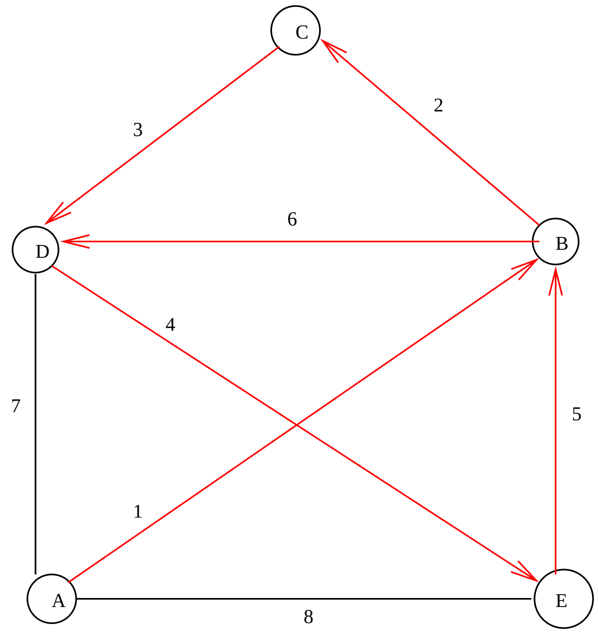
$$A \ 1 \ B \ 2 \ C \ 3 \ D \ 4 \ E \ 5 \ B$$

II.4. Chemins eulériens sur un graphe

Définition

Un chemin eulérien sur un graphe G est un chemin tracé sur le graphe, qui utilise une et une seule fois chaque arête de G.

exemple: graphe de l'enveloppe ouverte

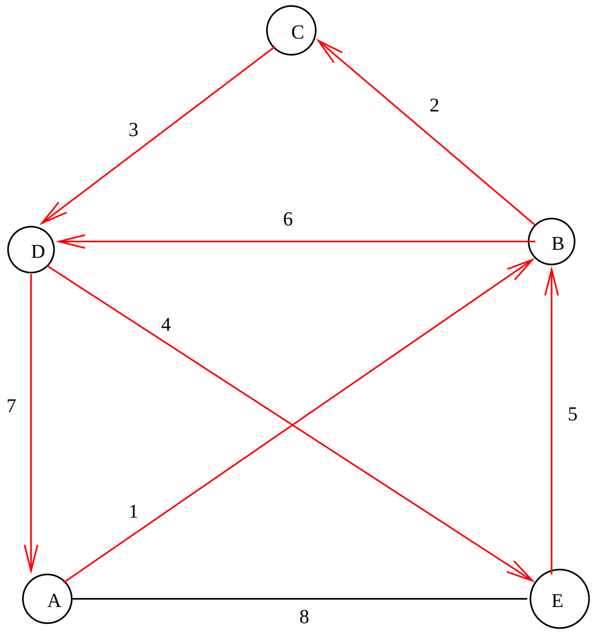


$$A \quad 1 \quad B \quad 2 \quad C \quad 3 \quad D \quad 4 \quad E \quad 5 \quad B \quad 6 \quad D$$

II.4. Chemins eulériens sur un graphe

Définition
Un chemin eulérien sur un graphe G est un chemin tracé sur le graphe, qui utilise une et une seule fois chaque arête de G.

exemple: graphe de l'enveloppe ouverte



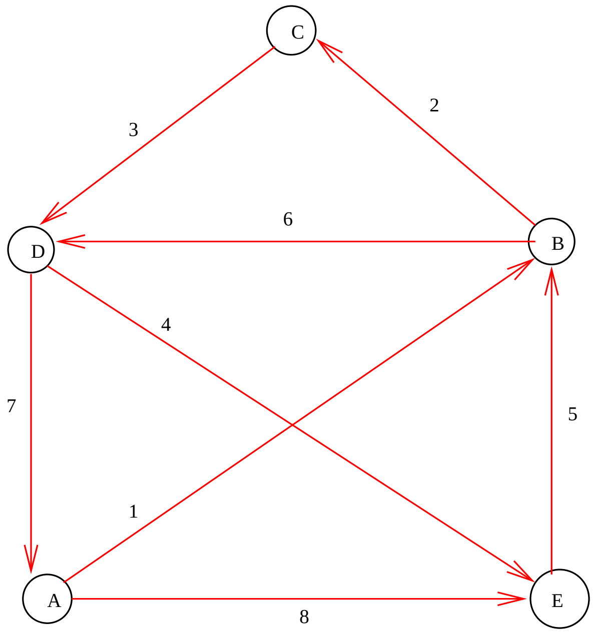
$$A \ 1 \ B \ 2 \ C \ 3 \ D \ 4 \ E \ 5 \ B \ 6 \ D \ 7 \ A$$

II.4. Chemins eulériens sur un graphe

Définition

Un chemin eulérien sur un graphe G est un chemin tracé sur le graphe, qui utilise une et une seule fois chaque arête de G.

exemple: graphe de l'enveloppe ouverte



$$A\ 1\ B\ 2\ C\ 3\ D\ 4\ E\ 5\ B\ 6\ D\ 7\ A\ 8\ E$$

II.5 Reformulation du problème

Grâce aux notions de graphe et de chemin eulérien, qui viennent d'être introduites, le problème des ponts de Königsberg peut alors être reformulé d'une façon à la fois plus simple et plus générale que le problème initial :

II.5 Reformulation du problème

Grâce aux notions de graphe et de chemin eulérien, qui viennent d'être introduites, le problème des ponts de Königsberg peut alors être reformulé d'une façon à la fois plus simple et plus générale que le problème initial :

> Etant donné un graphe G, peut-on tracer un chemin eulérien sur G ?

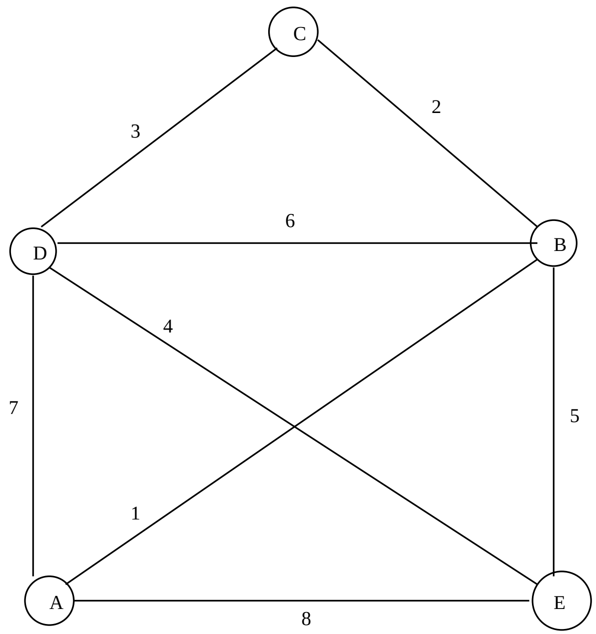
III. La résolution du problème

En 1735, Leonard Euler (1707-1788)

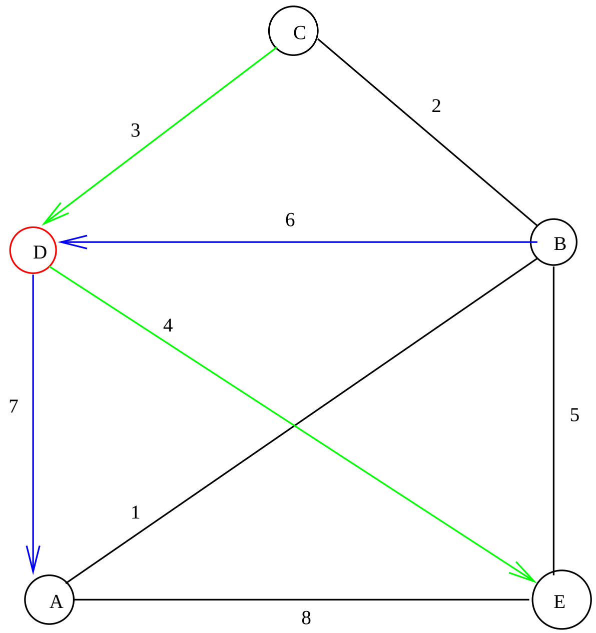
a démontré qu'il n'était pas possible de se promener dans Königsberg en empruntant une et une seule fois chaque pont.

III.1. L'observation de base

Regardons de nouveau un graphe possédant un chemin eulérien: le graphe de l'enveloppe ouverte.



III.1. L'observation de base

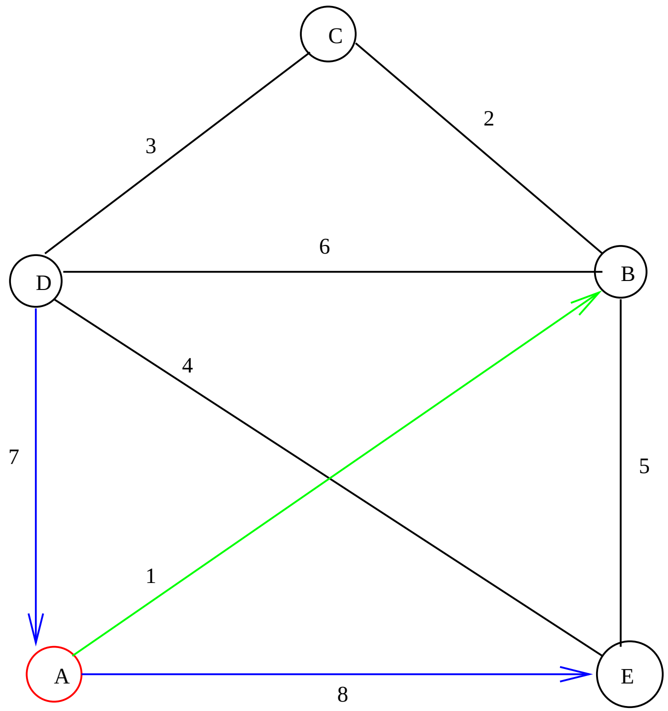


Le point D apparait deux fois *à l'intérieur* du chemin

$$A\ 1\ B\ 2\ C\ 3\ D\ 4\ E\ 5\ B\ 6\ D\ 7\ A\ 8\ E$$

Il y a $4 = 2.2$ arêtes qui passent par ce point. Pour la même raison , il passe aussi un nombre *pair* d'arêtes par B et C.

III.1. L’observation de base



Le point A est *une extrémité* et apparait une fois *à l’intérieur* du chemin $A\ 1\ B\ 2\ C\ 3\ D\ 4\ E\ 5\ B\ 6\ D\ 7\ A\ 8\ E$

Il y a $1 + 1.2 = 3$ arêtes qui passent par ce point.

On voit ainsi qu’il passe un nombre impair d’arêtes par les deux extrémités A et D, et un nombre pair d’arêtes par chacun des autres sommets.

III.2. Exploitation de l'observation

On est conduit à introduire une nouvelle définition:

Définition

Le degré d'un sommet d'un graphe est le nombre d'arêtes qui atteignent ce point.

III.2. Exploitation de l'observation

On est conduit à introduire une nouvelle définition:

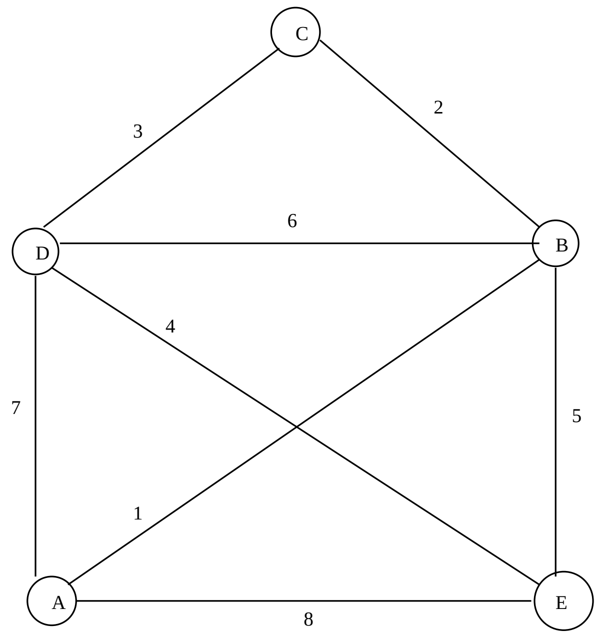
> **Définition**
> Le degré d'un sommet d'un graphe est le nombre d'arêtes qui atteignent ce point.

exemple:

$d(A) = d(E) = 3$

$d(D) = d(B) = 4$

$d(C) = 2$



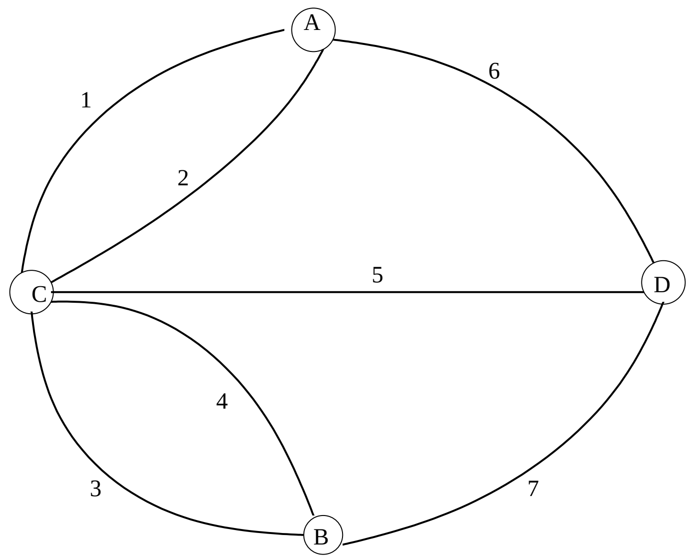
III.3. Le théorème d'Euler

Théorème (L. Euler 1735)
Si un graphe G possède un chemin eulérien alors le nombre de sommets de degré impair est soit 0 soit 2.
De plus, si ce nombre est 0 alors tout chemin eulérien sur G est fermé, et sinon tout chemin eulérien part d'un des sommets de degré impair et aboutit à l'autre.

III.3. Le théorème d'Euler

Théorème (L. Euler 1735)
Si un graphe G possède un chemin eulérien alors le nombre de sommets de degré impair est soit 0 soit 2.
De plus, si ce nombre est 0 alors tout chemin eulérien sur G est fermé, et sinon tout chemin eulérien part d'un des sommets de degré impair et aboutit à l'autre.

Application: Le graphe de la ville de Königsberg possède 4 sommets de degré impair, donc il n'existe pas de chemin eulérien.



IV.1. Et maintenant ?

On a montré que si il existe un chemin eulérien dans un graphe G, alors une certaine condition doit être vérifiée.

IV.1. Et maintenant ?

On a montré que si il existe un chemin eulérien dans un graphe G, alors une certaine condition doit être vérifiée.

Comme cette condition n'est pas vérifiée dans le cas du problème des ponts de Königsberg, on en déduit par l'absurde qu'il n'existe pas de promenade dans la ville de Königsberg, qui passe une et une seule fois par chaque pont.

IV.1. Et maintenant ?

On a montré que si il existe un chemin eulérien dans un graphe G, alors une certaine condition doit être vérifiée.

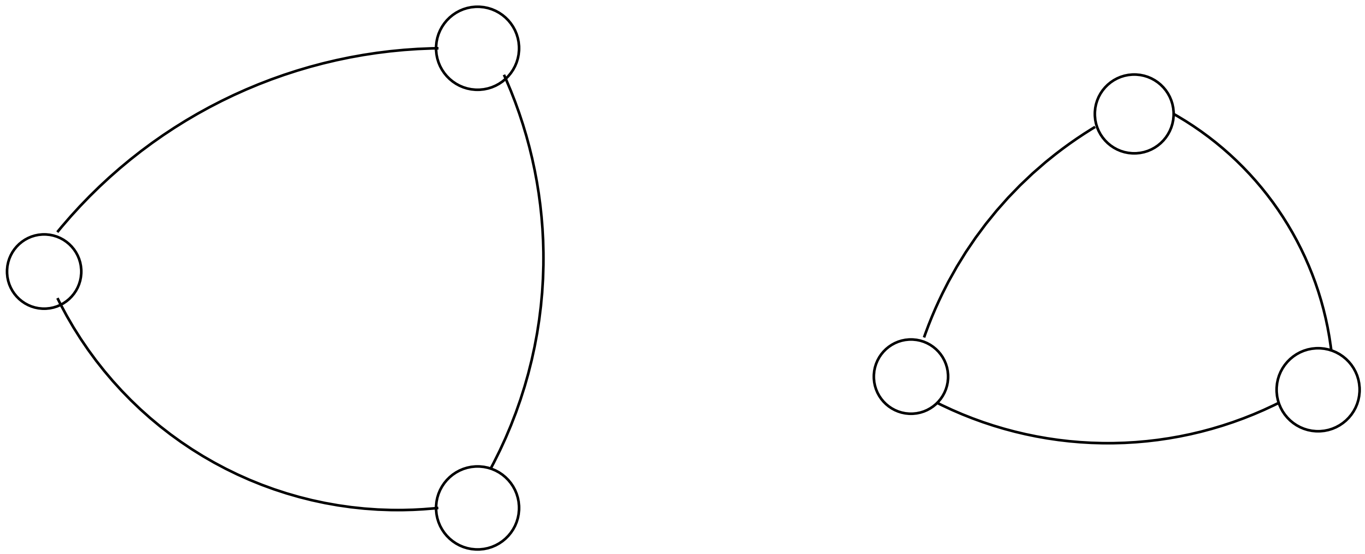
Comme cette condition n'est pas vérifiée dans le cas du problème des ponts de Königsberg, on en déduit par l'absurde qu'il n'existe pas de promenade dans la ville de Königsberg, qui passe une et une seule fois par chaque pont.

Tout mathématicien se pose alors naturellement la

Question: Soit G un graphe ayant soit zéro, soit deux sommets de degré impair. Est-ce qu'on peut tracer un chemin eulérien sur G?

IV.2. Il faut préciser la question

La réponse à la question ainsi formulée est trivialement négative. En effet le graphe suivant



n'a aucun sommet de degré impair. Mais il n'existe bien sur pas de chemin parcourant tous les sommets de G, et donc pas de chemin eulérien.
On doit donc introduire la définition suivante:

IV.2. Il faut préciser la question

Définition

Un graphe est dit connexe si pour tous sommets s_1 et s_2, il existe un chemin qui relie s_1 à s_2.

IV.2. Il faut préciser la question

Définition

Un graphe est dit connexe si pour tous sommets s_1 et s_2, il existe un chemin qui relie s_1 à s_2.

Et maintenant, on peut affirmer:

Théorème

Un graphe possède un chemin eulérien <u>si et seulement si</u> il est connexe et il a 0 ou 2 sommets de degré impair.

IV.3. Preuve de la réciproque

Plan:
On part d'un graphe connexe ayant zéro ou deux sommets de degré impair.

- Cas où G a zéro sommet de degré impair.
  On regarde tous les chemins qui peuvent être tracés sur G sans utiliser deux fois la même arête.
  On prend parmi eux un chemin γ de longueur maximale. On vérifie alors :
  - **Affirmation 1.** γ est un chemin fermé.
  - **Affirmation 2.** γ est un chemin eulérien.
- Cas où G a deux sommets de degré impair.
  On construit un graphe G' sans sommet de degré impair, et on lui applique la partie précédente.

IV.4. Preuve de la réciproque

Affirmation 1. γ est un chemin fermé.

IV.4. Preuve de la réciproque

Affirmation 1. γ est un chemin fermé.

En effet, supposons que γ ne soit pas fermé. Soit A une des extrémités de γ.

IV.4. Preuve de la réciproque

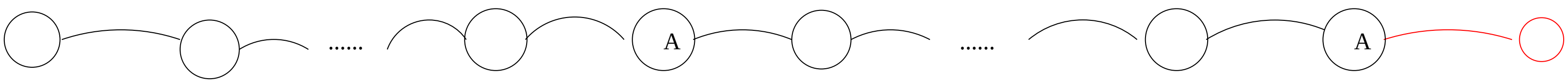
Affirmation 1. γ est un chemin fermé.

En effet, supposons que γ ne soit pas fermé. Soit A une des extrémités de γ.
Le point A serait relié à un nombre impair d'arêtes de γ.

IV.4. Preuve de la réciproque

Affirmation 1. γ est un chemin fermé.

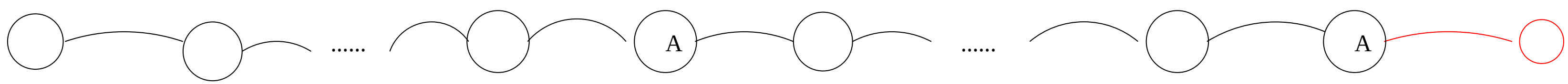
En effet, supposons que γ ne soit pas fermé. Soit A une des extrémités de γ.
Le point A serait relié à un nombre impair d'arêtes de γ.
Comme le degré de A est pair, il existerait donc une arête de G non contenue dans γ et reliée à A.



IV.4. Preuve de la réciproque

Affirmation 1. γ est un chemin fermé.

En effet, supposons que γ ne soit pas fermé. Soit A une des extrémités de γ.
Le point A serait relié à un nombre impair d'arêtes de γ.
Comme le degré de A est pair, il existerait donc une arête de G non contenue dans γ et reliée à A.

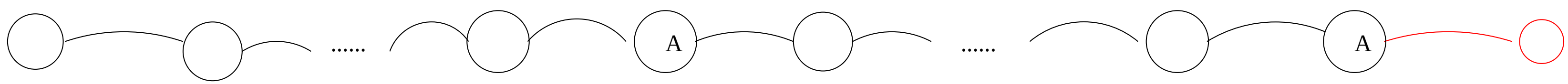


On pourrait donc trouver un chemin plus long que γ et toujours sans répétition d'arête.

IV.4. Preuve de la réciproque

Affirmation 1. γ est un chemin fermé.

En effet, supposons que γ ne soit pas fermé. Soit A une des extrémités de γ.
Le point A serait relié à un nombre impair d'arêtes de γ.
Comme le degré de A est pair, il existerait donc une arête de G non contenue dans γ et reliée à A.



On pourrait donc trouver un chemin plus long que γ et toujours sans répétition d'arête.
C'est absurde , puisque γ est choisi de longueur maximale.

IV.5. Preuve de la réciproque

Affirmation 2. γ est un chemin eulérien.

IV.5. Preuve de la réciproque

Affirmation 2. γ est un chemin eulérien.

En effet, supposons que γ ne soit pas eulérien.

IV.5. Preuve de la réciproque

Affirmation 2. γ est un chemin eulérien.

En effet, supposons que γ ne soit pas eulérien.
Il existerait une arête de G non contenue dans γ.

IV.5. Preuve de la réciproque

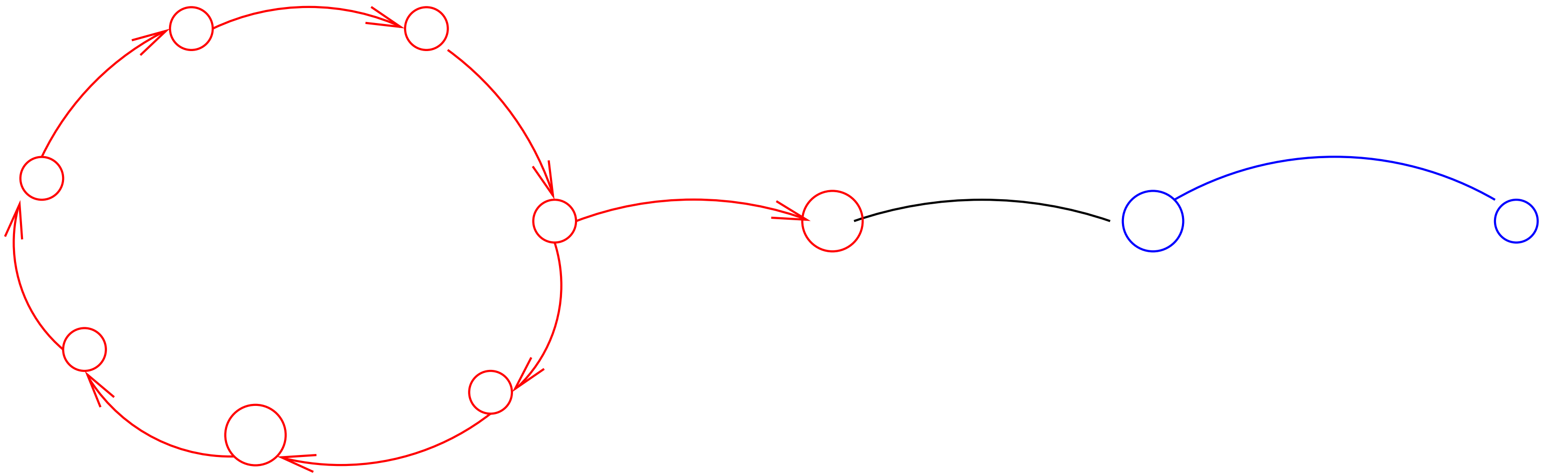
Affirmation 2. γ est un chemin eulérien.

En effet, supposons que γ ne soit pas eulérien.
Il existerait une arête de G non contenue dans γ.
Cette arête serait reliée à γ par un chemin.

IV.5. Preuve de la réciproque

Affirmation 2. γ est un chemin eulérien.

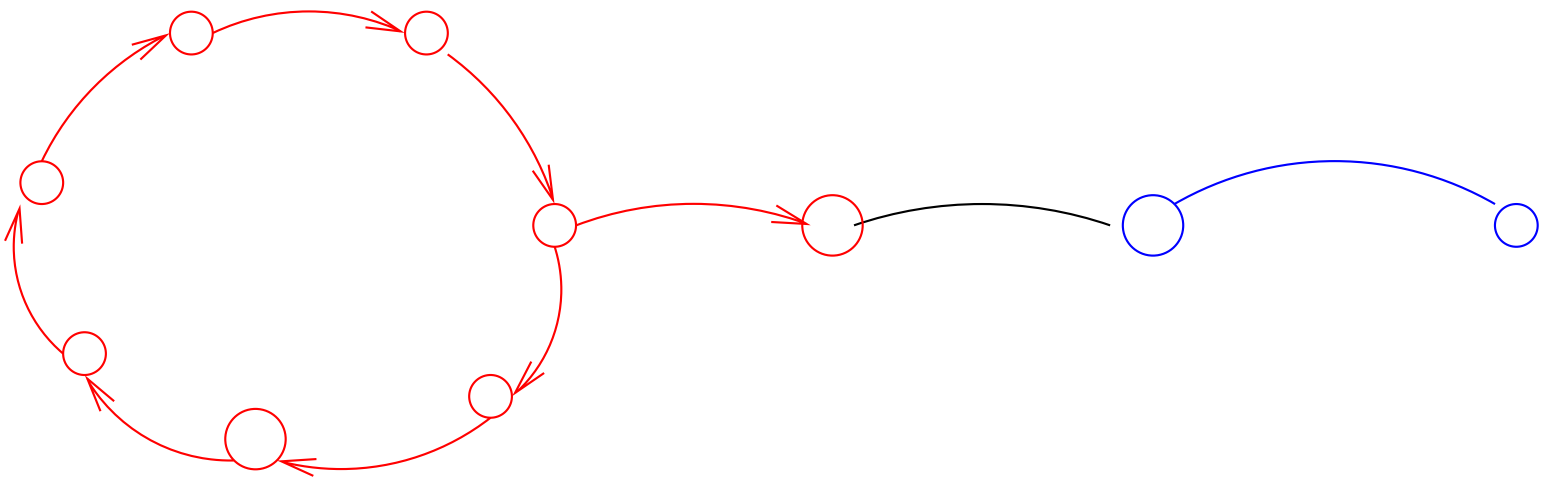
En effet, supposons que γ ne soit pas eulérien.
Il existerait une arête de G non contenue dans γ.
Cette arête serait reliée à γ par un chemin.
On pourrait alors trouver un chemin sans répétition d'arête plus long que γ.



IV.5. Preuve de la réciproque

Affirmation 2. γ est un chemin eulérien.

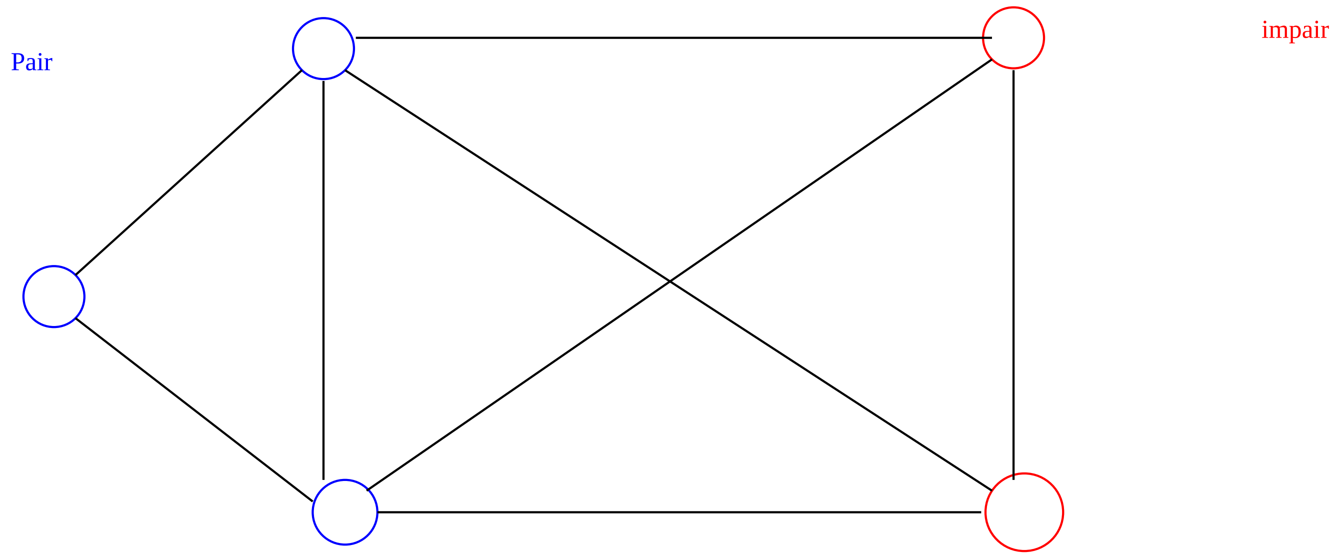
En effet, supposons que γ ne soit pas eulérien.
Il existerait une arête de G non contenue dans γ.
Cette arête serait reliée à γ par un chemin.
On pourrait alors trouver un chemin sans répétition d'arête plus long que γ.



C'est impossible, puisque γ est de longueur maximale.
On a donc montré que G possède un chemin eulérien

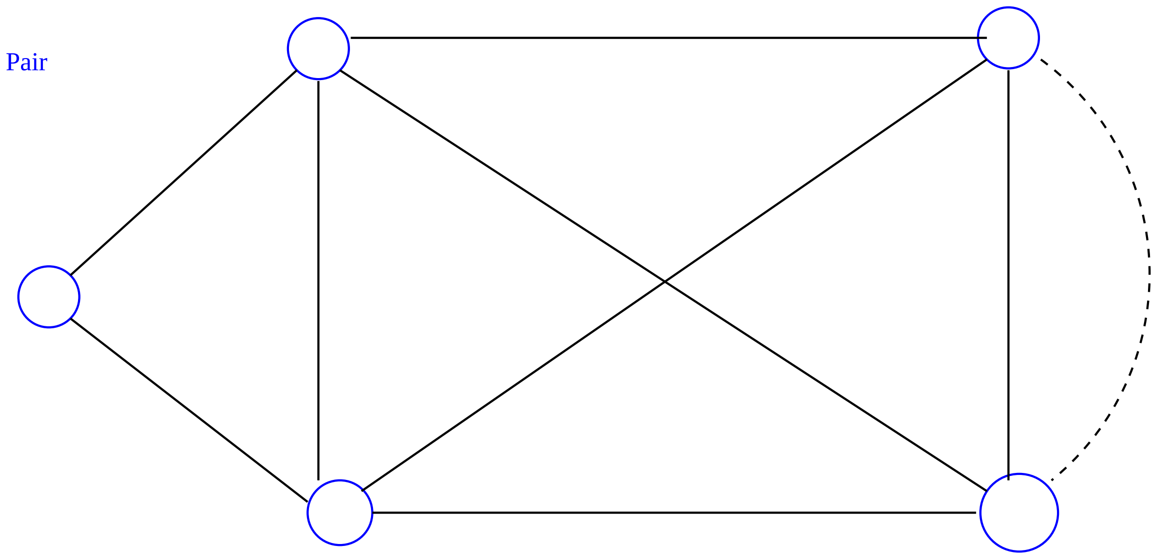
IV.6. Preuve de la réciproque

On traite maintenant le cas d'un graphe ayant exactement deux sommets de degré impair.



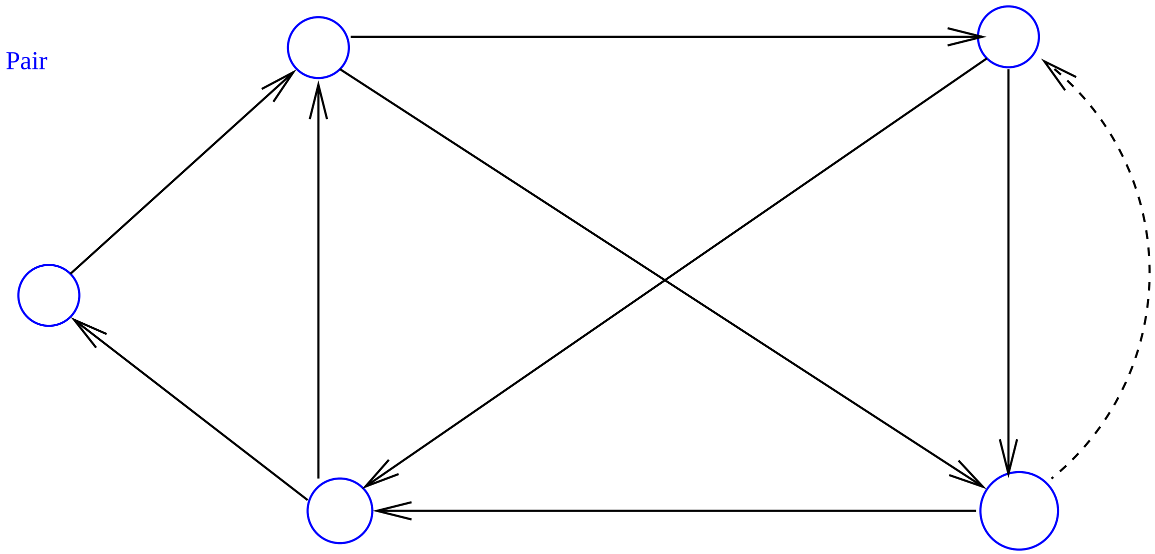
IV.6. Preuve de la réciproque

Rajoutons une arête reliant les deux sommets de degré impair ; tous les sommets sont alors de degré pair.



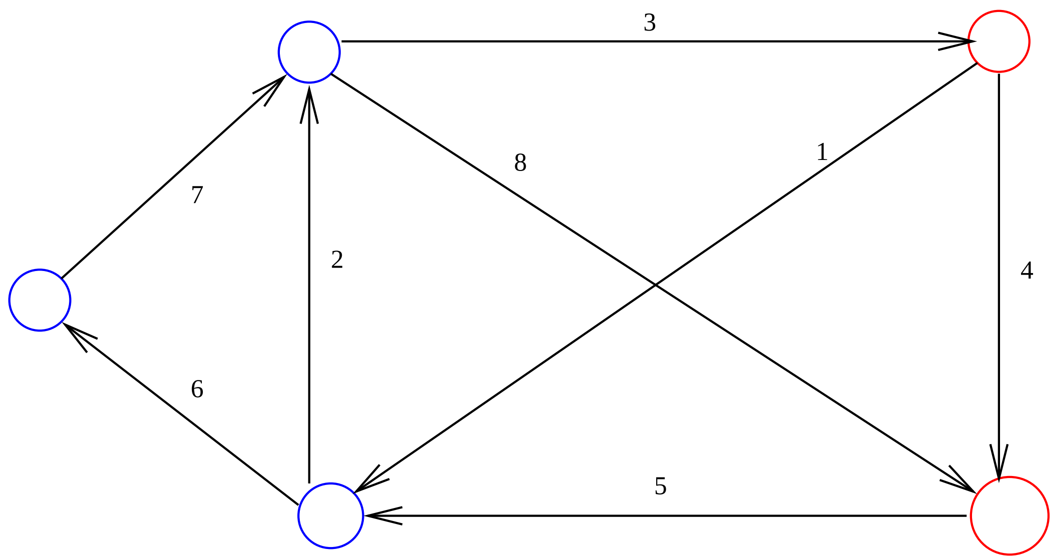
IV.6. Preuve de la réciproque

Il existe alors un chemin eulérien parcourant ce nouveau graphe.



IV.6. Preuve de la réciproque

En enlevant maintenant l'arête supplémentaire, on obtient un chemin eulérien sur le graphe de départ.



V. Reflexions sur cette démonstration

- On a utilisé deux fois un raisonnement par l'absurde.

V. Reflexions sur cette démonstration

- On a utilisé deux fois un raisonnement par l'absurde.
  Le schéma général d'un raisonnement par l'absurde est le suivant:
  - On veut montrer que sous certaines hypothèses (H), une assertion (A) est vraie.
  - On suppose que (A) est fausse.
  - On déduit de cette hypothèse quelque chose qui contredit les hypothèses (H).
  - On en déduit que l'hypothèse (H) entraine l'assertion (A).

V. Reflexions sur cette démonstration

- On a utilisé deux fois un raisonnement par l'absurde.
- On a d'abord montré le résultat dans le cas d'un graphe sans sommet de degré impair, puis on a déduit de l'étude de ce cas, celle du cas avec deux sommets de degré impair. C'est un exemple de raisonnement par réduction

V. Reflexions sur cette démonstration

- On a utilisé deux fois un raisonnement par l'absurde.
- On a d'abord montré le résultat dans le cas d'un graphe sans sommet de degré impair, puis on a déduit de l'étude de ce cas, celle du cas avec deux sommets de degré impair. C'est un exemple de raisonnement par réduction
- On a démontré l'existence d'un chemin eulérien,mais on n'a pas donné de moyen d'en construire effectivement un. Il s'agit d'un raisonnement non constructif.

V. Reflexions sur cette démonstration

- On a utilisé deux fois un raisonnement par l'absurde.
- On a d'abord montré le résultat dans le cas d'un graphe sans sommet de degré impair, puis on a déduit de l'étude de ce cas, celle du cas avec deux sommets de degré impair. C'est un exemple de raisonnement par réduction
- On a démontré l'existence d'un chemin eulérien,mais on n'a pas donné de moyen d'en construire effectivement un. Il s'agit d'un raisonnement non constructif.
- La question qui vient alors naturellement est: Trouver un algorithme qui, étant donné un graphe ayant zéro ou deux sommets de degré impair, construit un chemin eulérien sur ce graphe.

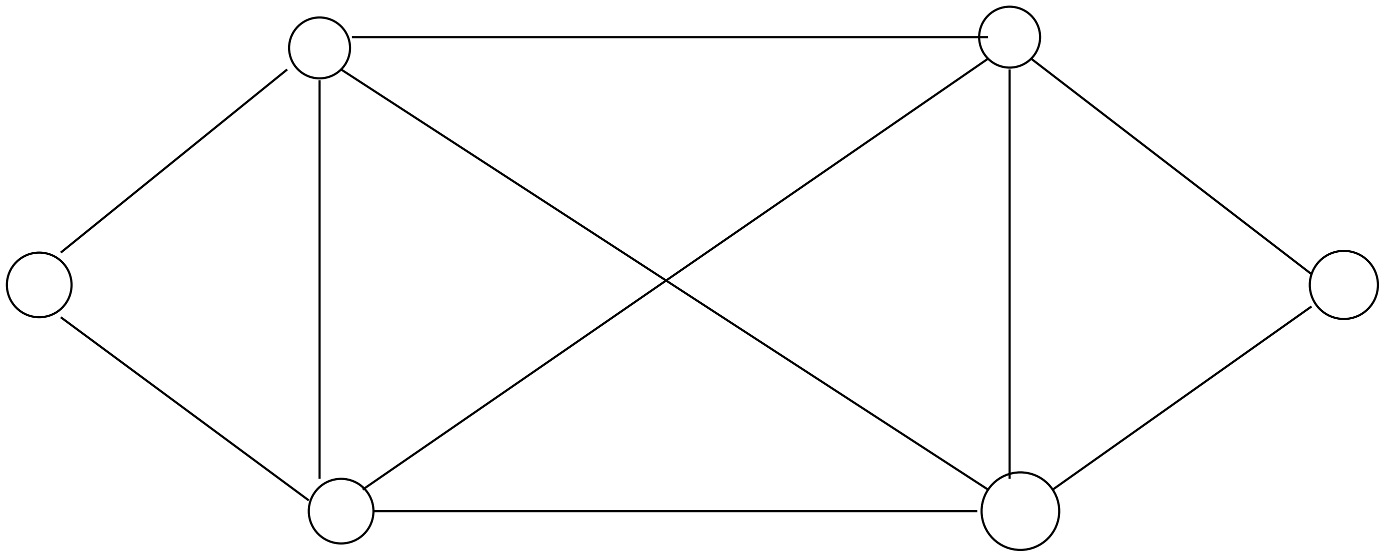
VI. Aspects algorithmiques

Voici un algorithme qui réalise ce programme:

- Numéroter les sommets de G à partir de 1.
- `c <- [1]`. Toutes les arêtes de G sont libres.
- Tant qu'il existe un sommet libre dans c, faire
  - `x <- le sommet libre de c de numéro minimal`
  - `c' <- [x]`. Tant que c'est possible, faire
    - Soit y l'extrémité droite de `c'`, choisir un sommet z, de numéro minimal, relié à y par une arête libre.
    - `c' <- c'` $\cup$ `[z]`
  - Recoller `c'` à c au point x.
- Quand on ne peut plus prolonger c, alors c est un chemin eulérien.

VI.2. Faisons tourner l'algorithme

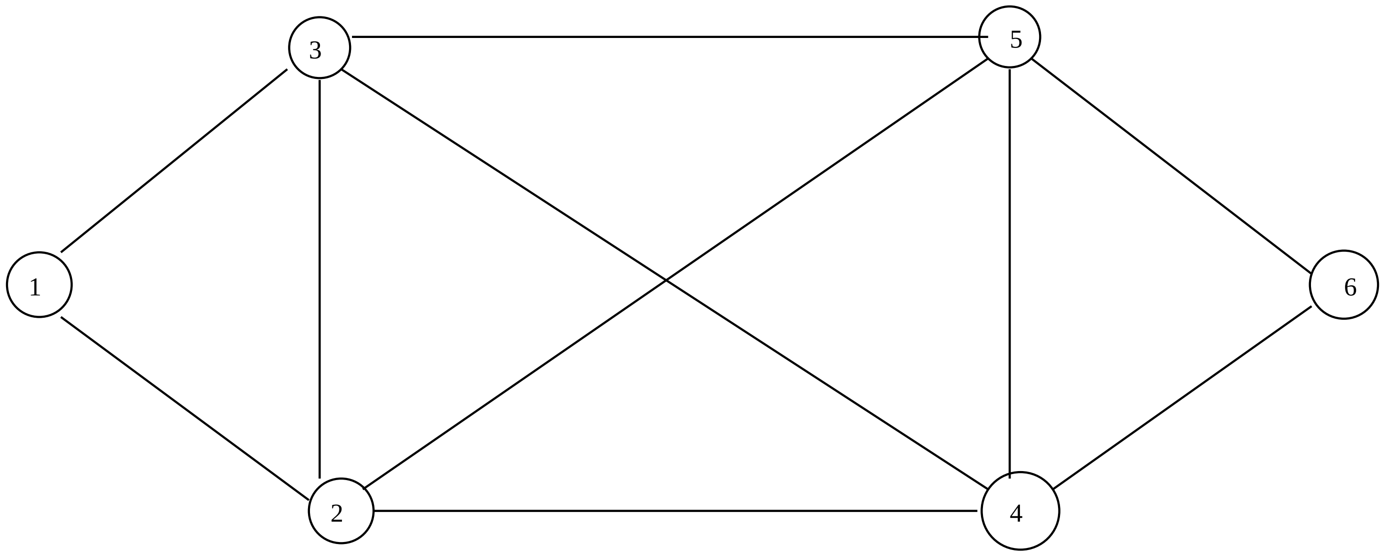
On considère ici le graphe G



Tous les sommets ont un degré pair, donc il existe un chemin eulérien.

VI.2. Faisons tourner l'algorithme

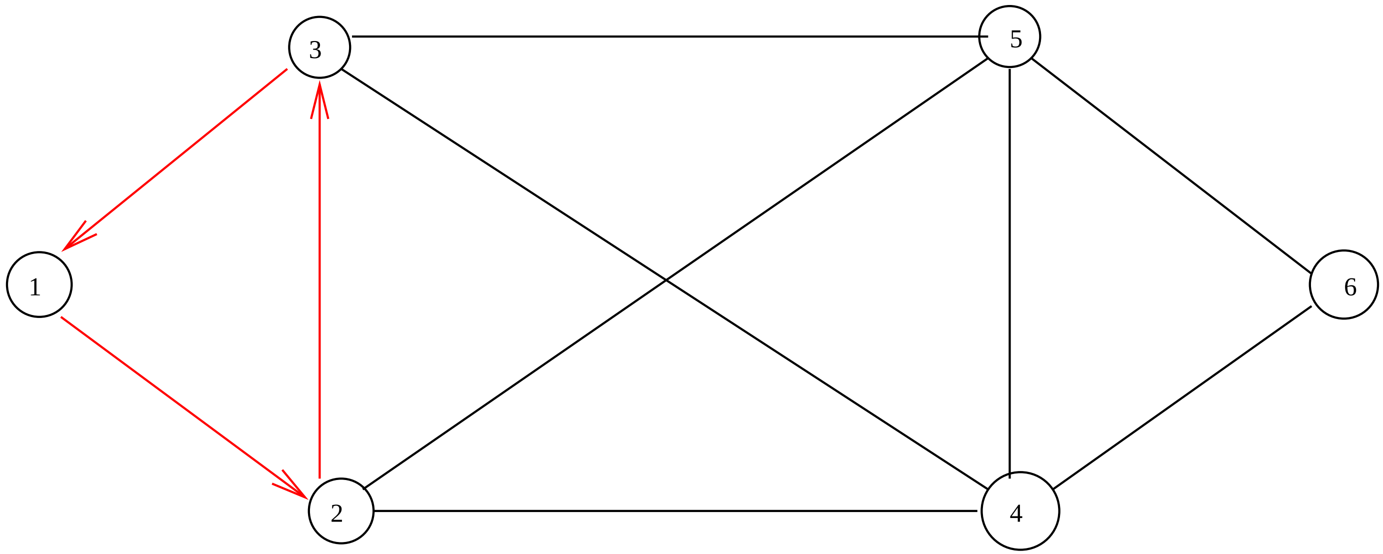
On numérote les sommets :




```
c <- [1]
x <- 1
```

VI.2. Faisons tourner l'algorithme

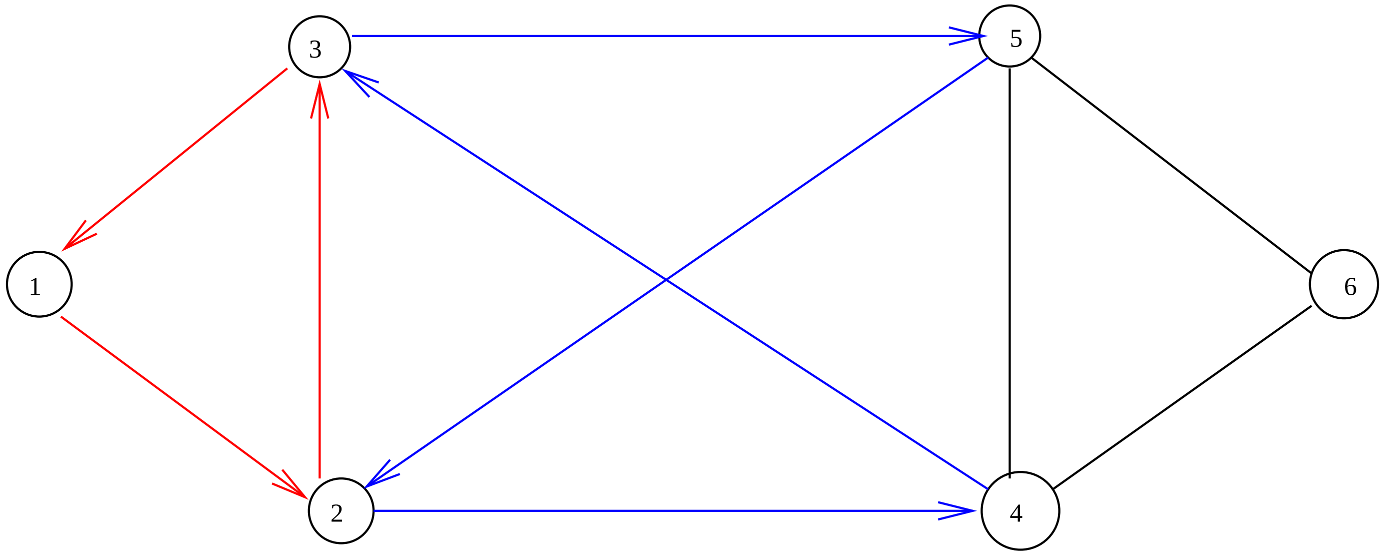
On part de `c = [1]` et `x = 1`




```
c'<- [1 — 2 — 3 — 1 ]
c <- [1 — 2 — 3 — 1 ]
x <- 2
```

VI.2. Faisons tourner l'algorithme

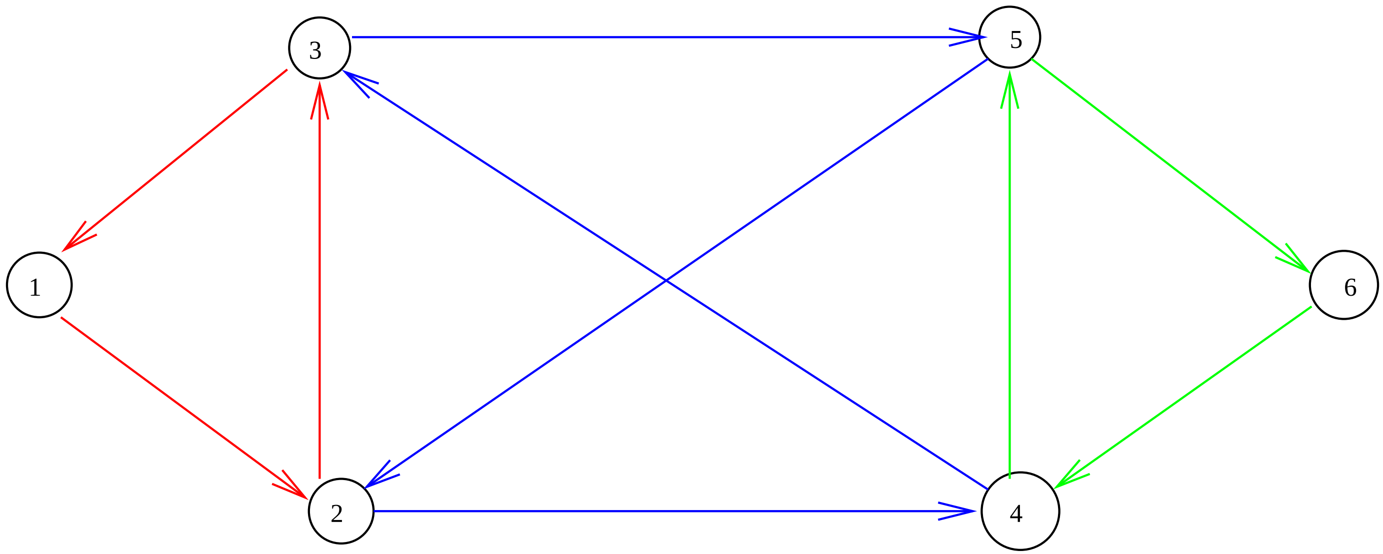
On part de `[c = 1 – 2 – 3 – 1 ]` et `x = 2`. On refait une boucle :




```
c'<- [2 – 4 – 3 – 5 – 2]
c <- [1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 2 – 3 – 1 ]
x <- 4
```

VI.2. Faisons tourner l'algorithme

On part maintenant de
`c = [1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 2 – 3 – 1 ]`
et `x = 4`. On refait une boucle :



`c'<- [4 – 5 – 6 – 4]`
`c <- [1 – 2 – 4 – 5 – 6 – 4 – 3 – 5 – 2 – 3 – 1 ]`
Il n'y a plus de sommet libre. c est donc eulérien.

VI.3. Le travail est-il fini?

VI.3. Le travail est-il fini?

- Il faut démontrer que l'algorithme fournit le bon résultat

VI.3. Le travail est-il fini?

- Il faut démontrer que l'algorithme fournit le bon résultat
- Comment représenter un graphe pour qu'un ordinateur puisse le traiter ?

VI.3. Le travail est-il fini?

- Il faut démontrer que l'algorithme fournit le bon résultat
- Comment représenter un graphe pour qu'un ordinateur puisse le traiter ?
  Plusieurs solutions ; on peut se donner :
  - Pour chaque arête, les noms de ses sommets
  - Pour chaque sommet, la liste des arêtes qui y aboutissent
  - Pour chaque couple de sommets, le nombre d'arêtes qui les relient
  - Et bien d'autres choses encore…

VI.3. Le travail est-il fini?

- Il faut démontrer que l'algorithme fournit le bon résultat
- Comment représenter un graphe pour qu'un ordinateur puisse le traiter ?
- Complexité de l'algorithme : étant donné un graphe constitué de n sommets et m arêtes, peut-on évaluer le temps mis par un ordinateur pour trouver un chemin eulérien en faisant tourner l'algorithme ?

VII. Pour conclure

On peut isoler différentes étapes dans la démarche mathématique :

VII. Pour conclure

On peut isoler différentes étapes dans la démarche mathématique :

- On est parti d'un problème concret

VII. Pour conclure

On peut isoler différentes étapes dans la démarche mathématique :

- On est parti d'un problème concret
- On a développé des objets mathématiques permettant de retranscire le problème en termes mathématiques. C'est l'étape de modélisation.

VII. Pour conclure

On peut isoler différentes étapes dans la démarche mathématique :

- On est parti d'un problème concret
- On a développé des objets mathématiques permettant de retranscire le problème en termes mathématiques. C'est l'étape de modélisation.
- En introduisant de nouvelles notions (ici la notion de degré), on a répondu à la question initiale.

VII. Pour conclure

On peut isoler différentes étapes dans la démarche mathématique :

- On est parti d'un problème concret
- On a développé des objets mathématiques permettant de retranscire le problème en termes mathématiques. C'est l'étape de modélisation.
- En introduisant de nouvelles notions (ici la notion de degré), on a répondu à la question initiale.
- De nouvelles questions se posent alors naturellement, ce qui amène a pousser plus loin la théorie.

VII. Pour conclure

On peut isoler différentes étapes dans la démarche mathématique :

- On est parti d'un problème concret
- On a développé des objets mathématiques permettant de retranscire le problème en termes mathématiques. C'est l'étape de modélisation.
- En introduisant de nouvelles notions (ici la notion de degré), on a répondu à la question initiale.
- De nouvelles questions se posent alors naturellement, ce qui amène a pousser plus loin la théorie.
- Les théorèmes peuvent être réécrits de manière constructive, ce qui conduit en retour a des applications pratiques.

VII. Exemples d’application

- Problème du voyageur de commerce. Un représentant commercial doit visiter des clients dans différentes villes. Comment organiser ses déplacements

VII. Exemples d'application

- Problème du voyageur de commerce. Un représentant commercial doit visiter des clients dans différentes villes. Comment organiser ses déplacements
  - pour ne passer qu'une fois dans chaque ville ?

VII. Exemples d'application

- Problème du voyageur de commerce. Un représentant commercial doit visiter des clients dans différentes villes. Comment organiser ses déplacements
  - pour minimiser les coûts de déplacements ?

VII. Exemples d'application

- Problème du voyageur de commerce. Un représentant commercial doit visiter des clients dans différentes villes. Comment organiser ses déplacements
  - pour satisfaire au mieux telle ou telle contrainte ?

VII. Exemples d’application

- Problème du voyageur de commerce. Un représentant commercial doit visiter des clients dans différentes villes. Comment organiser ses déplacements ?
- Problèmes d’ordonnancement. Pour fabriquer un porte avion, il faut effectuer environ 100000 tâches différentes, qui ont chacunes des durées bien déterminées, et dont certaines doivent être effectuées avant d’autres. Comment organiser au mieux ces tâches pour que la durée du chantier soit aussi courte que possible ?

VII. Exemples d'application

- Problème du voyageur de commerce. Un représentant commercial doit visiter des clients dans différentes villes. Comment organiser ses déplacements ?
- Problèmes d'ordonnancement. Pour fabriquer un porte avion, il faut effectuer environ 100000 tâches différentes, qui ont chacunes des durées bien déterminées, et dont certaines doivent être effectuées avant d'autres. Comment organiser au mieux ces tâches pour que la durée du chantier soit aussi courte que possible ?
- Problèmes de flots. Le système de conduites d'eau d'une ville est constitué de différentes conduites reliées entre elles, et ayant chacune un débit maximal fixé. On veut calculer le débit maximal pouvant circuler entre deux points du réseau.