Modélisation de phénomènes dépendant du temps

Exemples choisis en dynamique des populations

François Ducrot

http://math.univ-angers.fr/∼ducrot/CSG/

En 1859, 24 lapins furent introduits en Australie, par un agriculteur nostalgique de son pays d'origine. Quelques années plus tard ces petites bêtes pullulaient, et devenaient un fléau national. Pour tenter de le juguler, on a introduire des prédateurs (des renards), une maladie (la myxomatose), et on a construit des milliers de kilomètres de clotures. Tout ceci sans succès.

Introduction

En 1859, 24 lapins furent introduits en Australie, par un agriculteur nostalgique de son pays d'origine. Quelques années plus tard ces petites bêtes pullulaient, et devenaient un fléau national. Pour tenter de le juguler, on a introduire des prédateurs (des renards), une maladie (la myxomatose), et on a construit des milliers de kilomètres de clotures. Tout ceci sans succès.

Dans cet exposé, on cherche à modéliser mathématiquement l'évolution de populations animales.

Contenu

La formule fondamentale

On étudie l'évolution d'une population entre deux instants t_1 et $t_2 > t_1$. On a alors

$$\text{effectif}(t_2) - \text{effectif}(t_1) = \text{nb de naissances} - \text{nb de décès}$$

La formule fondamentale

On étudie l'évolution d'une population entre deux instants t_1 et $t_2 > t_1$. On a alors

$$\text{effectif}(t_2) - \text{effectif}(t_1) = \text{nb de naissances} - \text{nb de décès}$$

- Le biologiste fait alors une hypothèse, en proposant une loi mathématique qui donne les nombres de naissances et de morts en fonctions des différents paramètres.

La formule fondamentale

On étudie l'évolution d'une population entre deux instants t_1 et $t_2 > t_1$. On a alors

$$\text{effectif}(t_2) - \text{effectif}(t_1) = \text{nb de naissances} - \text{nb de décès}$$

- Le biologiste fait alors une hypothèse, en proposant une loi mathématique qui donne les nombres de naissances et de morts en fonctions des différents paramètres.
- Le mathématicien peut alors étudier le modèle, et faire des prévisions sur l'évolution de la population.

La formule fondamentale

On étudie l'évolution d'une population entre deux instants t_1 et $t_2 > t_1$. On a alors

$$\text{effectif}(t_2) - \text{effectif}(t_1) = \text{nb de naissances} - \text{nb de décès}$$

- Le biologiste fait alors une hypothèse, en proposant une loi mathématique qui donne les nombres de naissances et de morts en fonctions des différents paramètres.
- Le mathématicien peut alors étudier le modèle, et faire des prévisions sur l'évolution de la population.
- Il faut enfin confronter les prévisions et les observations, et éventuellement modifier le modèle.

L'hypothèse malthusienne

Hypothèse

Les nombres de naissances et de morts dans une population, pendant une période de courte durée, sont proportionnels

- *à la l'effectif de cette population*
- *à la durée de cette période*

On peut alors mettre en oeuvre cette hypothèse en raisonnant

L'hypothèse malthusienne

Hypothèse

Les nombres de naissances et de morts dans une population, pendant une période de courte durée, sont proportionnels

- *à la l'effectif de cette population*
- *à la durée de cette période*

On peut alors mettre en oeuvre cette hypothèse en raisonnant

- en temps discret : on étudie une suite vérifiant une relation de récurrence

L'hypothèse malthusienne

Hypothèse

Les nombres de naissances et de morts dans une population, pendant une période de courte durée, sont proportionnels

- *à la l'effectif de cette population*
- *à la durée de cette période*

On peut alors mettre en oeuvre cette hypothèse en raisonnant

- en temps discret : on étudie une suite vérifiant une relation de récurrence
- en temps continu : on étudie une fonction vérifiant une équation différentielle

Modélisation en temps discret

Notons

- u_0 = nombre initial de lapins lâchés
- u_n = nombre de lapins vivants au bout de n années

Soient a le taux annuel de natalité, et b le taux annuel de mortalité. L'hypothèse de Mathus s'écrit

- nombre de naissances pendant la $n+1$-ième année $= au_n$
- nombre de morts pendant la $n+1$-ième année $= bu_n$

Modélisation en temps discret

Loi d'évolution (Malthus en temps discret)

$$u_{n+1} - u_n = au_n - bu_n = Ku_n,$$

où K est la différence entre le taux annuel de natalité et le taux annuel de mortalité.

Ou encore :

$$u_{n+1} = ku_n \quad \text{avec} \quad k = 1 + K$$

Soit :

$$u_1 = ku_0 \,,\; u_2 = ku_1 = k^2 u_0 \,, \ldots \,,\; u_n = k^n u_0$$

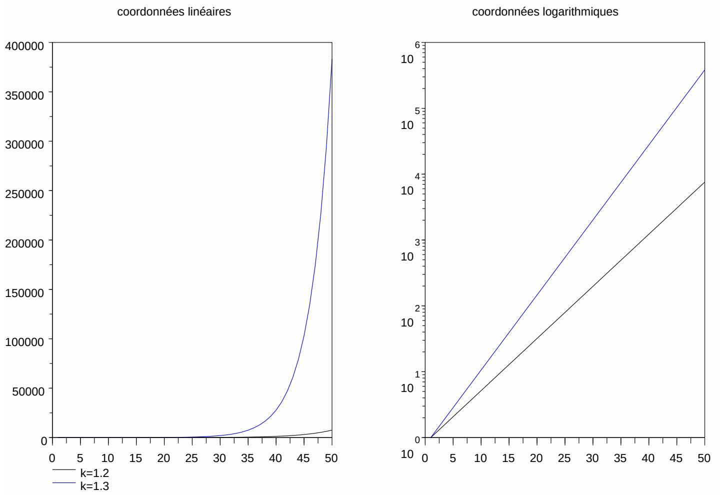
Expérimentation numérique du modèle de Malthus discret

On regarde l'évolution de u_n quand n varie de 1 à 50 , pour $k = 1,2$ et $k = 1,3$.

n	u_n pour $k = 1.2$	u_n pour $k = 1.3$
1.	1.	1.
5.	2.0736	2.8561
10.	5.1597804	10.604499
15.	12.839185	39.373764
20.	31.948	146.19203
25.	79.496847	542.80077
30.	197.81359	2015.3813
35.	492.22352	7482.9696
40.	1224.8096	27783.742
45.	3047.7183	103159.09
50.	7583.6985	383022.48

Expérimentation numérique du modèle de Malthus discret

On regarde l'évolution de u_n quand n varie de 1 à 50 , pour $k = 1,2$ et $k = 1,3$.



Modélisation en temps continu

Le temps t varie maintenant continûment, et on note $u(t)$ l'effectif au temps t. On connait la valeur $u(0)$ de la population au temps initial.

Modélisation en temps continu

Le temps t varie maintenant continûment, et on note $u(t)$ l'effectif au temps t. On connait la valeur $u(0)$ de la population au temps initial.

Pendant une période de temps $[t, t + \Delta t]$, la variation de la population est proportionnelle à Δt et à $u(t)$. On écrit donc

$$u(t + \Delta t) - u(t) = \alpha u(t) \Delta t$$

Modélisation en temps continu

Le temps t varie maintenant continûment, et on note $u(t)$ l'effectif au temps t. On connait la valeur $u(0)$ de la population au temps initial.
Pendant une période de temps $[t, t + \Delta t]$, la variation de la population est proportionnelle à Δt et à $u(t)$. On écrit donc

$$u(t + \Delta t) - u(t) = \alpha u(t) \Delta t$$

Quand Δt est assez petit, $\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t} \simeq u'(t)$, et on peut écrire la

Loi d'évolution (Malthus en temps continu)

$$u'(t) = \alpha u(t)$$

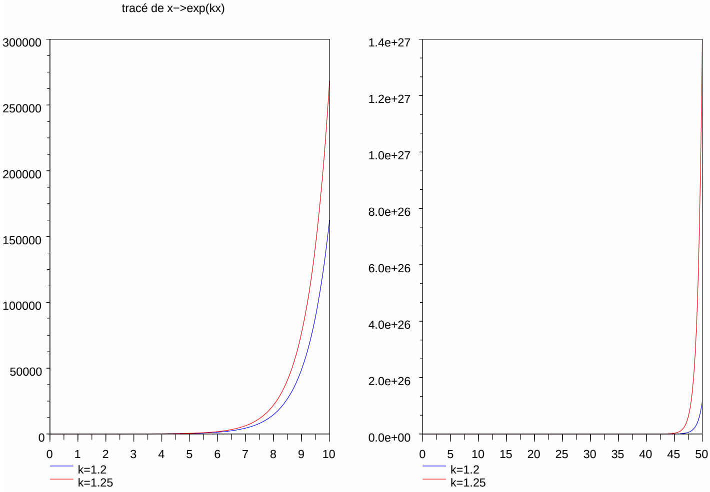
où α est la différence entre le taux instantané de natalité et le taux instantané de mortalité.

Modélisation en temps continu - 2

On obtient une équation différentielle du premier ordre, c'est à dire une équation qui exprime la dérivée de u, en fonction de u.
Si on connait la valeur initiale $u(0) = u_0$, on sait alors calculer les valeurs $u(t)$ pour tout $t > 0$:

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t}$$

Représentation graphique du modèle de Malthus continu



Modification du modèle de Malthus

Une croissance exponentielle, comme elle est prévue par le modèle de Malthus est irréaliste. Quand la population $u(t)$ dépasse un certain seuil S, l'environnement ne pourra plus procurer à l'espèce les moyens de sa subsistance. Une façon de rendre compte de ceci est de remplacer dans l'équation

$$u'(t) = \alpha u(t)$$

le coefficient de reproduction α par une expression qui vaut α quand $u(t)$ est proche de zéro, et vaut 0, quand $u(t)$ est proche de S. On arrive au

Modèle logistique en temps continu

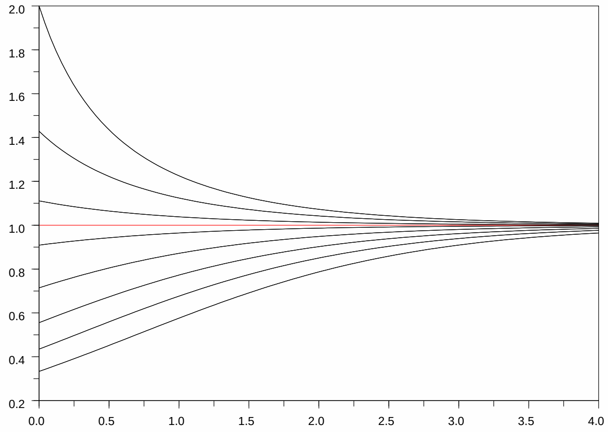
$$u'(t) = \alpha \frac{S - u(t)}{S} u(t)$$

Simplification de l'équation

Quitte à changer d'unités, on peut toujours ramener l'équation précédente à

Modèle logistique en temps continu (équation réduite)

$$u'(t) = (1 - u(t))u(t)$$



Quelque soit l'effectif initial, la population se rapproche très vite du seuil limite.

On peut aussi formuler le modèle logistique quand le temps varie de façon discrète.

Modèle logistique en temps discret

$$u_{n+1} = au_n(b - u_n)$$

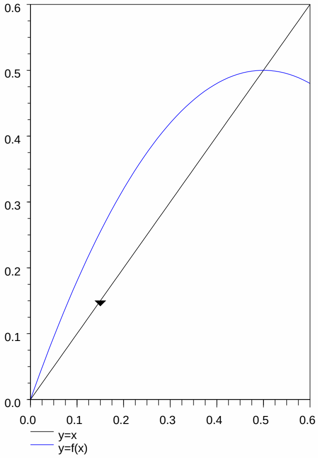
En changeant d'unité (dizaine, douzaine, millier, million,... de lapins), on peut se ramener à

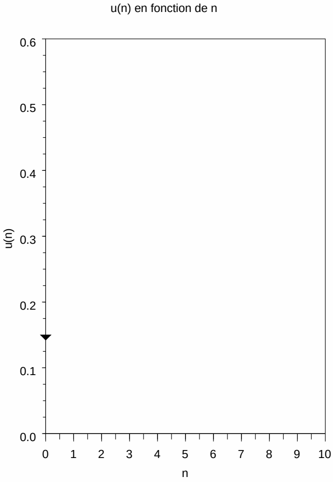
Modèle logistique en temps discret(forme réduite)

$$u_{n+1} = \alpha u_n(1 - u_n)$$

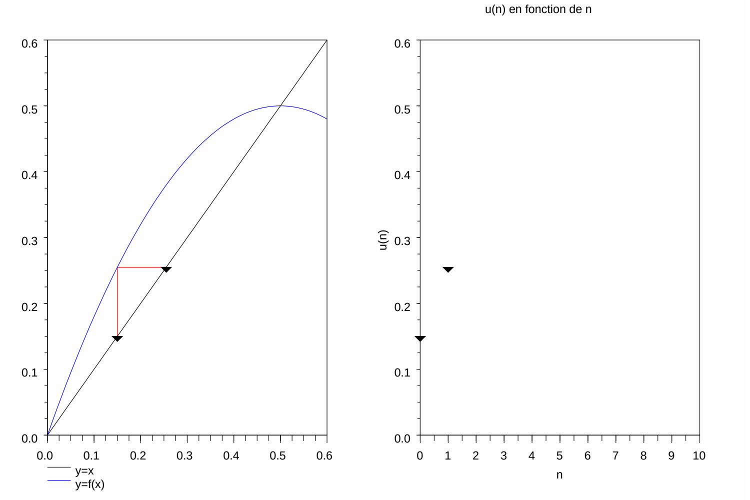
Construction pas à pas

On trace le graphe de $y \mapsto f(x) = \alpha x(1-x)$, ainsi que la diagonale, et la première valeur u_0 (ici : $\alpha = 1$ et $u_0 = 0.15$)



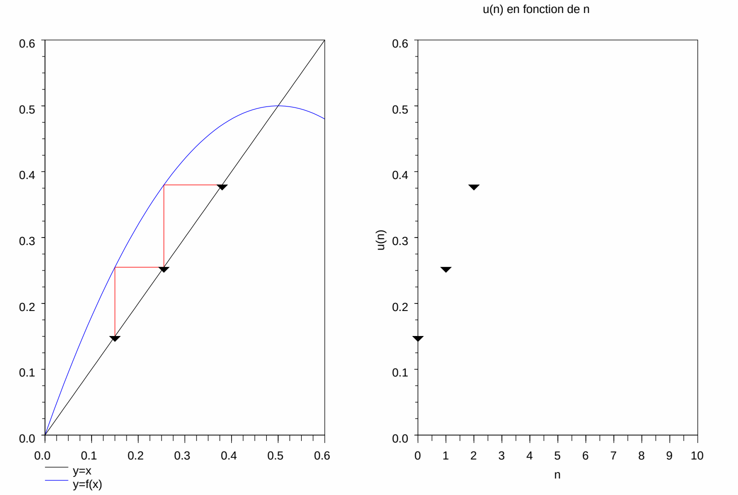


On construit maintenant u_1



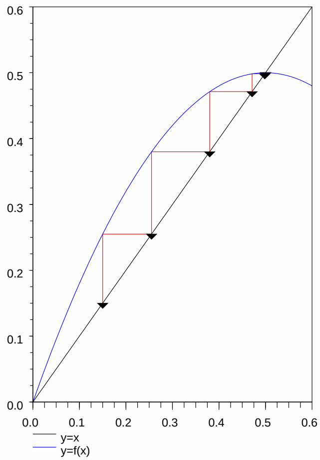
Construction pas à pas

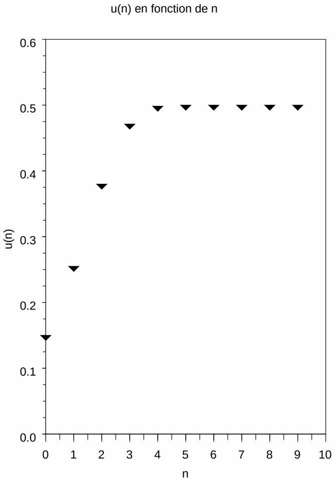
ensuite u_2



Construction pas à pas

et on continue. . .



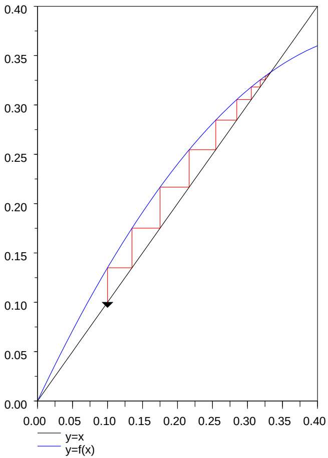


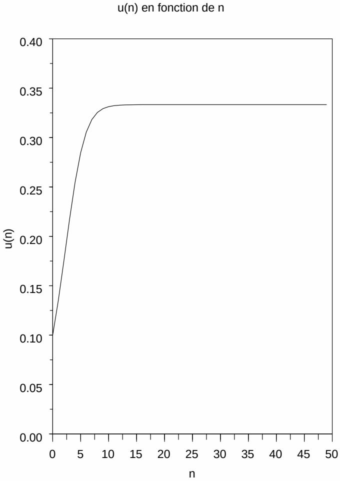
Etude qualitative

Suivant les valeurs de α et u_0, la suite peut se comporter de différentes façons.

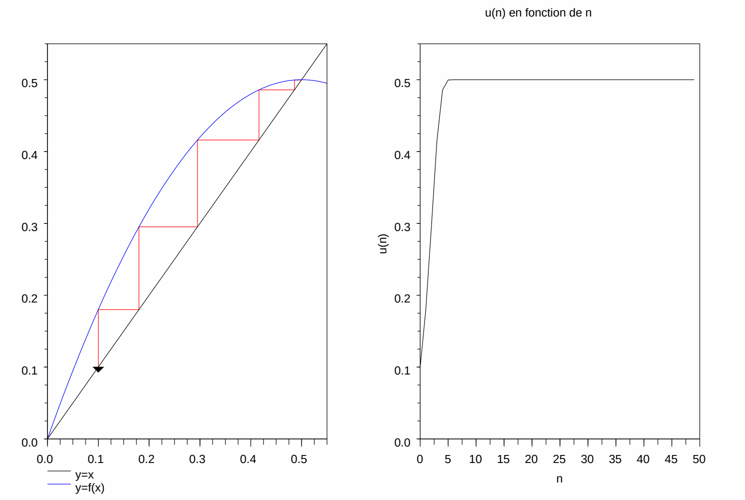
Etude qualitative

$\alpha = 1.5$ et $u_0 = 0.1$: converge en croissant



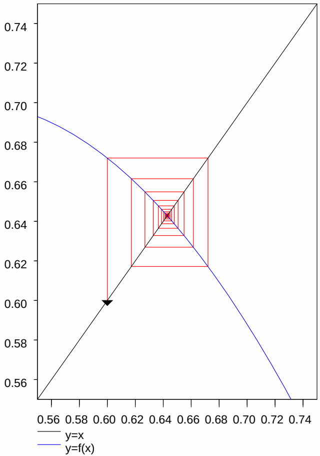


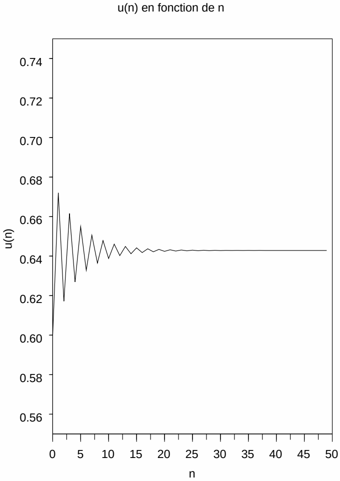
$\alpha = 2$ et $u_0 = 0.1$: converge rapidement en croissant



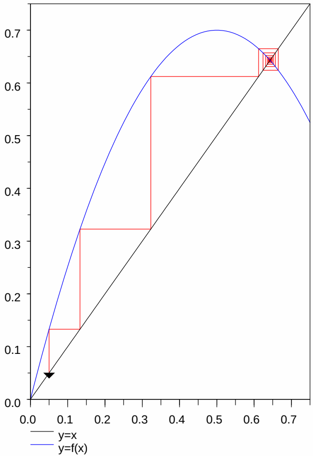
Etude qualitative

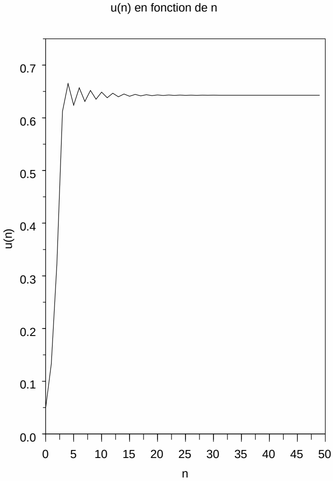
$\alpha = 2.8$ et $u_0 = 0.6$: convergence en oscillant



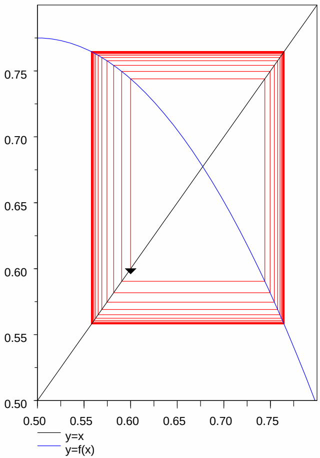


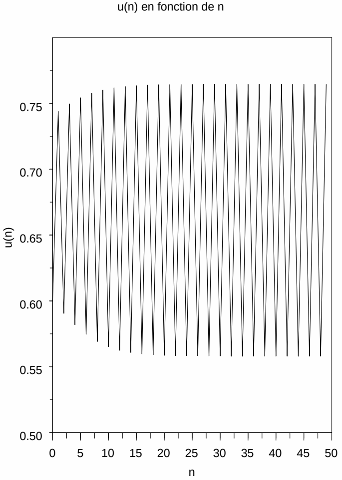
$\alpha = 2.8$ et $u_0 = 0.05$: croît puis oscille





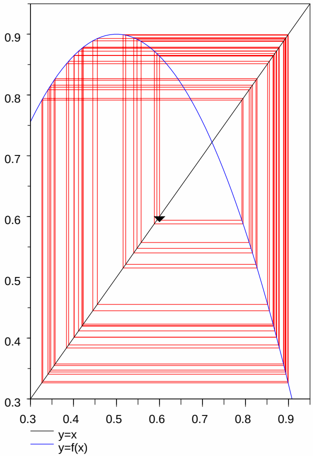
$\alpha = 3.1$ et $u_0 = 0.6$: deux valeurs limites

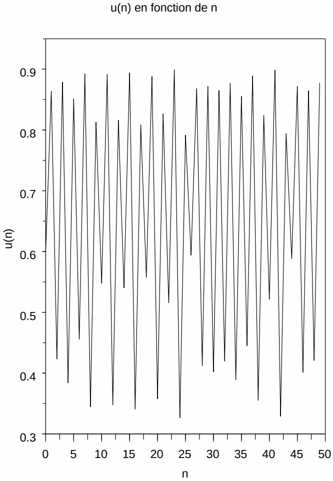




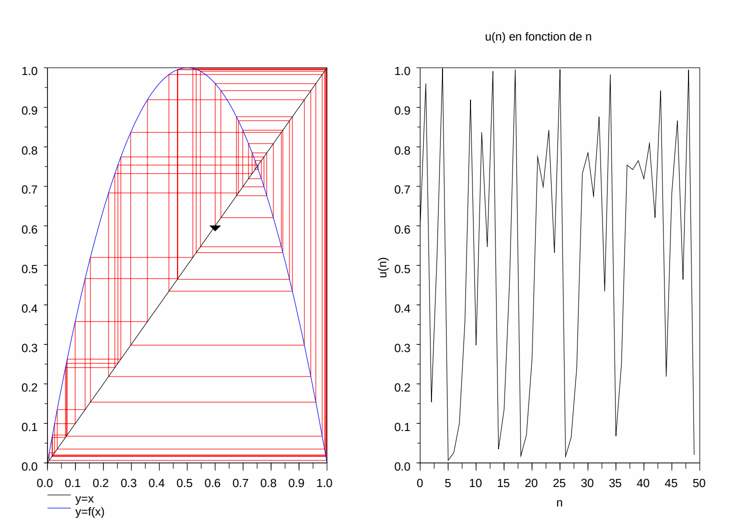
Etude qualitative

$\alpha = 3.5$ et $u_0 = 0.6$: on n'y comprend plus rien





$\alpha = 4$ et $u_0 = 0.6$: comportement totalement chaotique



Discussion a posteriori du modèle logistique

- le modèle logistique en temps continu donne toujours une convergence vers le seuil limite
- le modèle logistique en temps discret peut se comporter de différentes façons
  - convergence monotone vers une limite
  - convergence oscillante vers une limite
  - plusieurs valeurs limites
  - comportement chaotique

Discussion a posteriori du modèle logistique

- le modèle logistique en temps continu donne toujours une convergence vers le seuil limite
- le modèle logistique en temps discret peut se comporter de différentes façons
  - convergence monotone vers une limite
  - convergence oscillante vers une limite
  - plusieurs valeurs limites
  - comportement chaotique

Quel modèle doit-on utiliser ?

- Espèce avec cycle saisonnier : temps discret
- Espèce sans cycle saisonnier : temps continu

Sardines et requins

Les pêcheurs de la mer Adriatique pêchent des sardines et des requins. Les requins se nourrissent de sardines, et les sardines mangent des petits organismes, qui sont en quantité suffisante.
Les pêcheurs ont constaté que les stocks de sardines et de requins varient de façon périodique en fonction du temps, avec la même périodicité, mais que leurs cycles sont décalés.
Le mathématicien Volterra a proposé en 1926 un modèle décrivant ce phénomène. Les mêmes équations ont été également trouvées par A.J. Lotka pour décrire l'évolution d'un modèle chimique.

Sardines et requins

(Modèle de Lotka-Volterra)

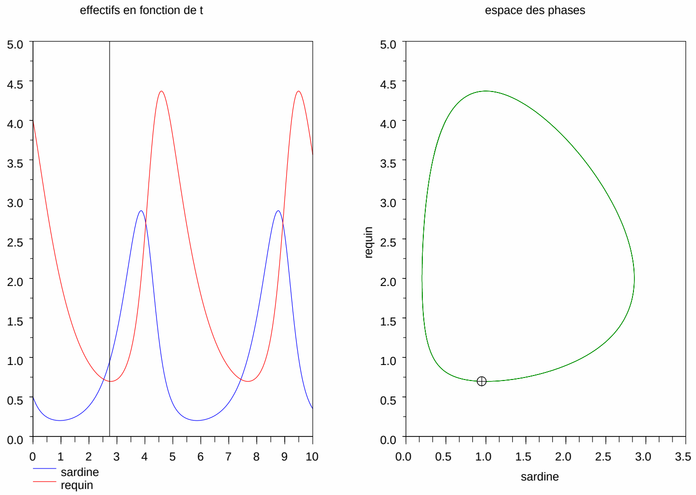
$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) &= cx(t)y(t) - dy(t) \end{aligned}$$

où

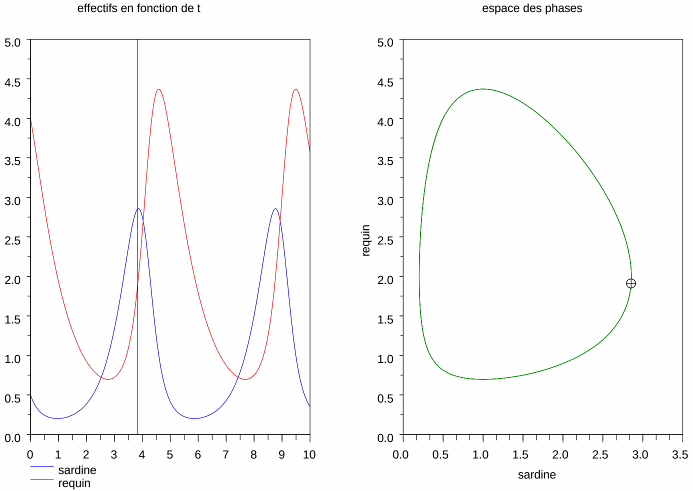
- $x(t) =$ *population de sardines à l'instant t*
- $y(t) =$ *population de requins à l'instant t*

Les deux termes en rouge correspondent à des termes d'interaction entre les deux espèces. Si ces termes n'étaient pas là, les sardines prolifèreraient suivant le modèle de Malthus, alors que les requins s'éteidraient de façon exponentielle.

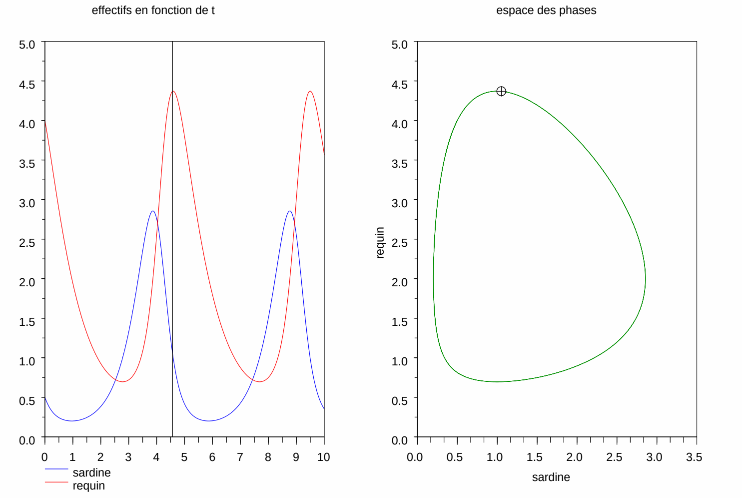
$t = 2.75$, y est minimal



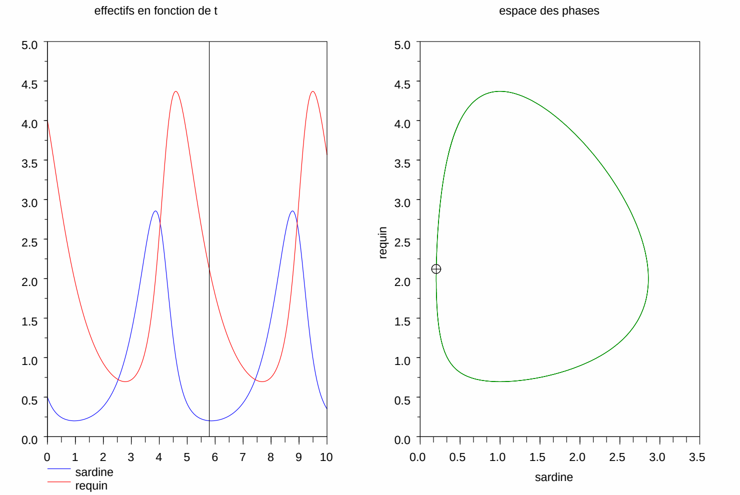
$t = 3.85$, x est maximal



$t = 4.58$, y est maximal

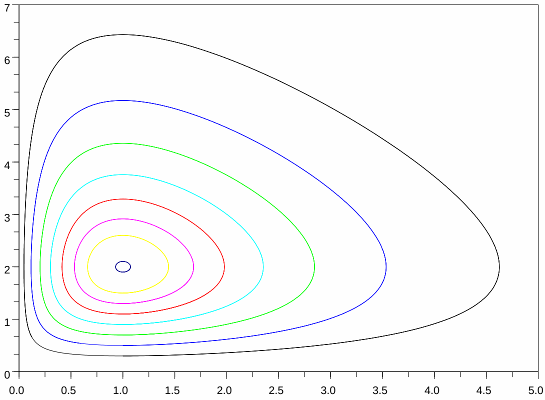


$t = 5.80$, x est minimal



Portrait de phase

On trace différentes trajectoires, correspondant à différentes conditions initiales, sur un même diagramme.



Influence de la pêche

Si on exerce une activité de pêche, les taux de mortalité des sardines et des requins augmentent d'une même valeur. Le système initial

(Lotka-Volterra sans pêche)

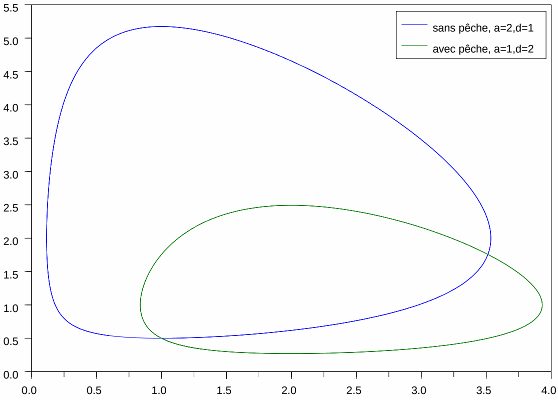
$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) &= cx(t)y(t) - dy(t) \end{aligned}$$

devient

(Lotka-Volterra avec pêche)

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - \alpha x(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) &= cx(t)y(t) - dy(t) - \alpha y(t) \end{aligned}$$

Influence de la pêche



La proportion sardines/requins a augmenté !