Du Calcul d'Aire...

...Au Calcul Intégral

Objectifs

Définir proprement l'aire d'une surface plane, au moins pour les domaines usuels (limités par des courbes simples) et fournir un moyen de la calculer.

Exigences *a priori* (ou axiomes)

- Positivité

  L'aire d'un domaine plan doit être un nombre positif ou nul.
- Étalonnage

  Tout carré de côté unité doit avoir une aire égale à 1.
- Invariance

  L'aire doit être invariante par déplacement (translations et rotations).
- Additivité

  Quand deux domaines du plan ne se recouvrent pas (on néglige les bords) l'aire de leur réunion doit être égale à la somme de leurs aires respectives.

Partie I : Tâtonnements

Aire d'un rectangle

Aire d'un triangle

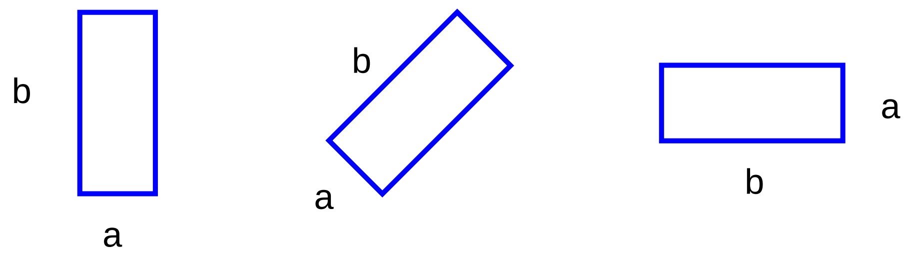
Aire d'un domaine polygonal

Et après ?

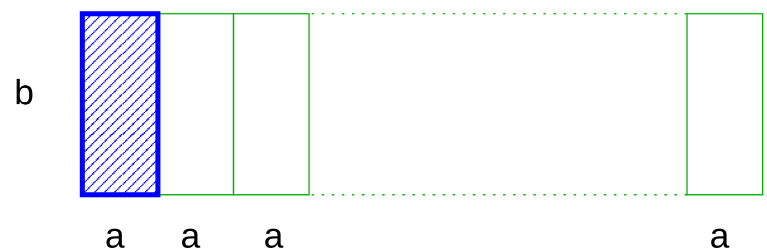
Aire d'un rectangle

Recherche des solutions possibles

1. L'invariance $\Longrightarrow$ aire $= f(a,b)$.



2. L'additivité $\Longrightarrow$ $f(Na,b) = Nf(a,b)$.



   Plus généralement $f(a,b)$ est une fonction proportionnelle à la fois à a et à b. Ceci entraîne :

   $f(a,b) = C.a.b$ (où C est une constante fixée).

3. L'étalonnage $\Longrightarrow$ $f(1,1) = 1$ d'où $C = 1$.

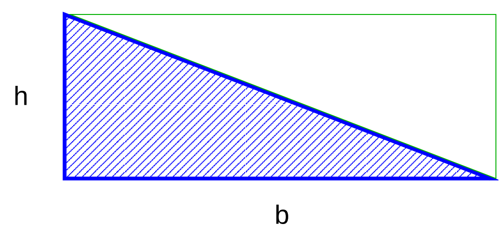
Conclusion

La seule formule possible pour l'aire d'un rectangle de côtés (a,b) qui soit compatible avec nos exigences a $priori$ est donc :

Aire du rectangle de côtés (a,b) = ab.

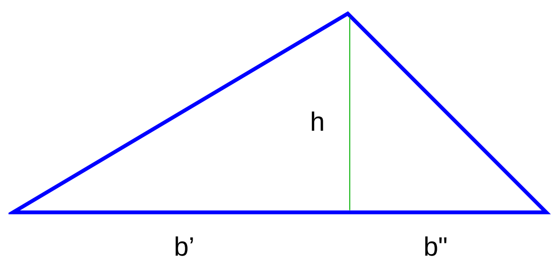
Recherche des solutions possibles

1. Triangle rectangle :



   L'invariance et l'additivité $\Longrightarrow$ aire = $\frac{1}{2}bh$.

2. Triangle quelconque :



   L'additivité $\Longrightarrow$ aire $= \frac{1}{2}b'h + \frac{1}{2}b''h = \frac{(b'+b'')h}{2}$.

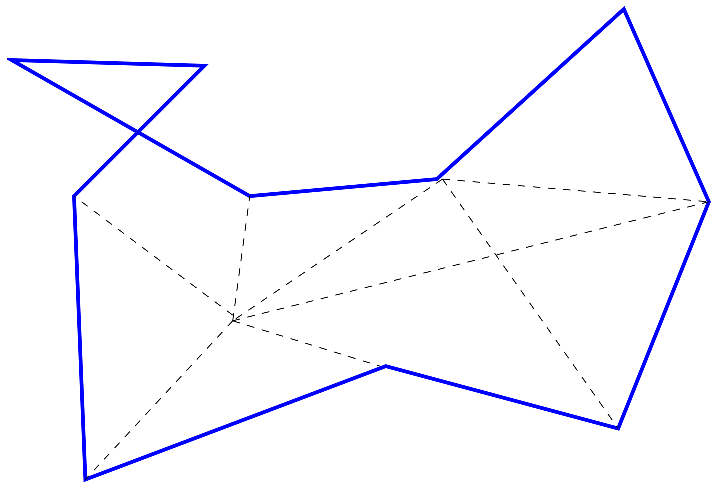
Conclusion

La seule formule pour l'aire d'un triangle qui soit compatible avec nos axiomes est donc :

$$\text{Aire du triangle} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Recherche des solutions possibles

On peut facilement découper un domaine polygonal en triangles :



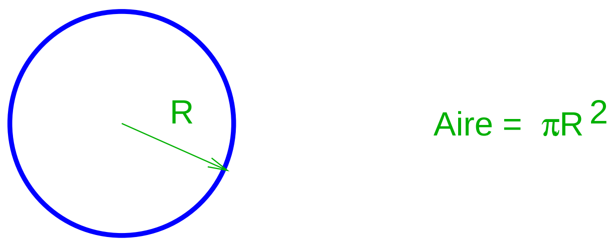
Conclusion

Pour respecter l'axiome d'additivité il faut que l'aire d'un domaine polygonal soit égale à la somme des aires des triangles qui composent un tel découpage.

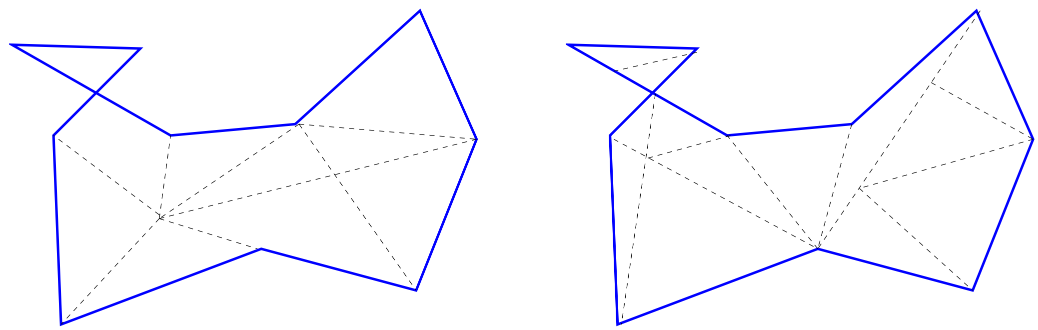
Et après ?

Problèmes

1. Comment retrouver l'aire du disque ?



2. Deux découpages donneront-ils la même aire ?



3. Comment vérifier que nos axiomes sont satisfaits ?

Nous avons trouvé des conditions nécessaires.
Rien ne prouve qu'elles sont suffisantes.

Conclusion

Il faut procéder différement.

Partie II : Aire

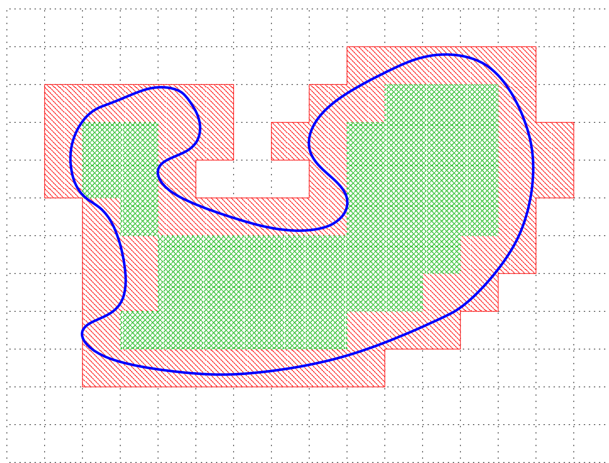
Domaines quarrables

Ça marche...

...mais ça ne fait pas tout !

Idée

Encadrer par des pavages (domaines délimités par les bords d'un quadrillage) de plus en plus fins.



- Étape n : quadrillage de pas 10^{-n}.
  $a_n =$ nombre de carreaux verts $\times (10^{-n})^2$.
  $b_n =$ nombre de carreaux rouges ou verts $\times (10^{-n})^2$.
- Étape $n+1$: quadrillage de pas $10^{-(n+1)}$.
  Le quadrillage est plus fin donc :

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

Défi nition

Si a_n et b_n convergent vers une même limite L on dit que D est quarrable et on pose :

$$\text{Aire}(D) = L.$$

Nos exigences sont-elles satisfaites ?

La définition de l'aire que nous avons donnée une fois pour toute, pour tous les domaines quarrables, permet de démontrer :

Théorème
Soient D et D' deux domaines quarrables.

1. Si D se déduit de D' par un déplacement alors :
$$\text{Aire}(D) = \text{Aire}(D')$$
2. $D \cap D'$ et $D \cup D'$ sont aussi quarrables et :
$$\text{Aire}(D \cup D') = \text{Aire}(D) + \text{Aire}(D') - \text{Aire}(D \cap D')$$

La positivité et l'étalonnage de notre notion d'aire sont évidents. L'invariance et l'additivité découlent du théorème 1.

Conclusion : Nos quatre exigences $a\ priori$ sont satisfaites !

Y a-t-il assez de domaines quarrables ?

Théorème
Tout domaine plan délimité par des arcs de courbes convexes est quarrable.

Tout n'est pas quarrable

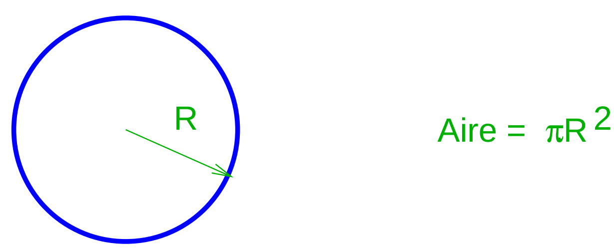
Soit D l'ensemble des points du carré unité dont les coordonnées (x,y) sont toutes les deux rationnelles.
Les nombres rationnels et les nombres irrationnels sont tellement bien imbriqués que quelle que soit la finesse du quadrillage considéré tous les carreaux inclus dans la carré unité rencontrent le domaine D, et aucun carreau n'est inclus dans D.
Autrement dit pour tout entier n :

$$a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad b_n = 1$$

Conclusion : La suite a_n tend vers 0, la suite b_n vers 1.
Le domaine D n'est donc pas quarrable !!

Problème de limite

La définition de l'aire repose sur un passage à la limite. Montrer qu'un domaine est quarrable, c'est montrer que cette limite existe. Mais comment la calculer ?



Partie III : Intégrale

Fonctions intégrables

Exemples et contre-exemples

Cas des fonctions continues

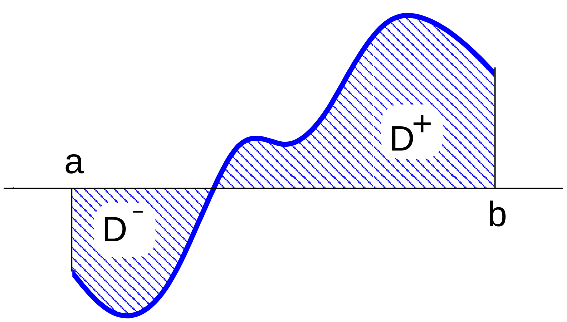
Aires et intégrales

Défi nition

Étant donnée une fonction quelconque f à valeurs réelles, définie sur un intervalle $[a,b]$ et bornée sur $[a,b]$ on considére le domaine $D(f,a,b)$ délimité :

- En haut et en bas par $[a,b]$ et le graphe de f.
- À gauche et à droite par des droites verticales passant par les extremités du segment [a,b].

On note $D^+(f,a,b)$ (resp. $D^-(f,a,b)$) la partie de $D(f,a,b)$ située au dessus (resp. au-dessous) de l'axe des abscisses.



Par définition, f est intégrable sur $[a,b]$ (ou de a à b) si et seulement si $D(f,a,b)$ est quarrable.
Dans ce cas $D^+(f,a,b)$ et $D^-(f,a,b)$ sont quarrables et on note :

$$\int_a^b f = \text{Aire}(D^+(f,a,b)) - \text{Aire}(D^-(f,a,b))$$

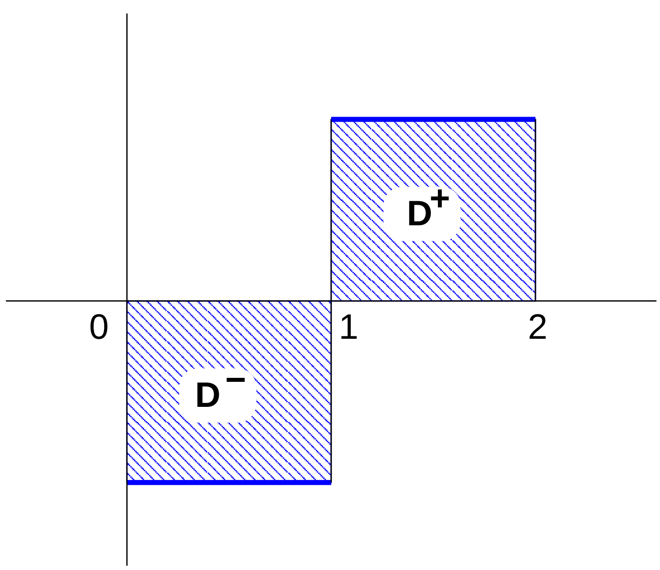
fonction non intégrable

La fonction suivante n'est pas intégrable sur $[0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 1 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

fonction intégrable non continues

La fonction suivante n'est pas continue en 1.
Le domaine $D(f,0,2)$ est quarrable (c'est la réunion de deux carrés) donc f est intégrable.



$$\int_a^b f = \text{Aire}(D^+) - \text{Aire}(D^-) = 1 - 1 = 0$$

Cas des fonctions continues (1)

Y a-t-il assez de fonction intégrables ?

Oui, car il y a au moins celles-ci :

Théorème :
Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.

Théorème fondamental de l'analyse

Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors elle l'est aussi sur $[a,x]$, pour tout x entre a et b. La fonction suivante est donc définie sur $[a,b]$:

$$Sf(x) = \int_a^x f$$

Théorème :
Si f est continue sur $[a,b]$ alors la fonction Sf ci-dessus est dérivable sur $[a,b]$ et :

$$Sf' = f$$

Cas des fonctions continues (2)

Corollaire du théorème fondamental :
Si f est continue sur $[a,b]$ alors :

1. f admet au moins une primitive sur $[a,b]$.
2. Pour toute primitive F de f sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

DEMO :

1. Comme f est continue, le théorème fondamental entraîne que Sf est une primitive de f.
2. Par définition, $Sf(a) = 0$ et $Sf(b) = \int_a^b f$ donc :

   $$\int_a^b f = Sf(b) - Sf(a)$$

   Comme f est continue, le théorème fondamental entraîne que $(Sf - F)' = f - f = 0$ donc $Sf - F =$ une constante C. On en déduit :

   $$Sf(b) - Sf(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

   D'où la conclusion.

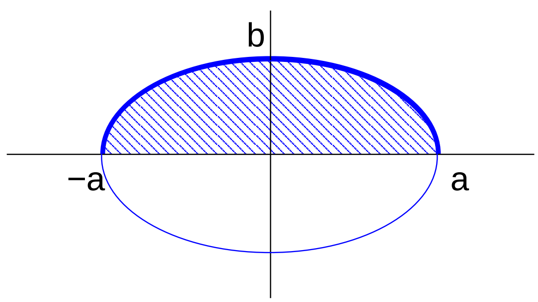
FIN

Aires et intégrales (1)

Aire d'une ellipse

Équation de E : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

I.e. $y = \pm f(x)$ avec $f(x) = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$.



Comme f est continue sur $[-a,a]$ le théorème fondamental entraîne : $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x =$ Aire$(D(f,-a,a)) =$ Aire$(E)/2$.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x &= ab\int_0^{\pi}\sin^2(t)\mathrm{d}t \qquad (\text{chgt. var. } x=\cos(t))\\ &= ab\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t\\ &= ab\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi}\\ &= ab\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

D'où : Aire de l'ellipse $= \pi ab$

Valeurs approchées d'une intégrale

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{dx}}{x} = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2)$$

Cette égalité ne nous apprend rien sur la valeur de cette intégrale, car $\ln(2)$ n'est qu'un nom (commode) pour cette valeur.

À l'inverse, pour connaître une valeur approchée de $\ln(2)$ il suffit d'approcher l'aire de $D(1/x,1,2)$, par exemple à l'aide des suites a_n et b_n (*cf.* § Domaines quarrables).

Valeurs approchées de π

De même, pour connaître une valeur approchée de π il suffit d'approcher l'aire d'un disque de rayon 1 par la méthode qui nous a permis de définir toutes les aires (*cf.* § Domaines quarrables).

Note : On peut utiliser des pavages plus complexes que ceux du § Domaines quarrables : par des triangles, des trapèzes, et autres polygones. Tous donnent la même notion d'aire (c'est un théorème).

Appendice : Repères historiques

Antiquités : Les précurseurs

– Eudoxe de Cnide (428-347 avant JC)
– Archimède de Syracuse (287-212 avant JC)

XVIII-ème : Les inventeurs

– Isaac Newton (1642-1727)
– Gottfried von Leibniz (1646-1716)

XIX-ème et XX-ème : Les continuateurs

– Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
– Henri Lebesgue (1875-1941)

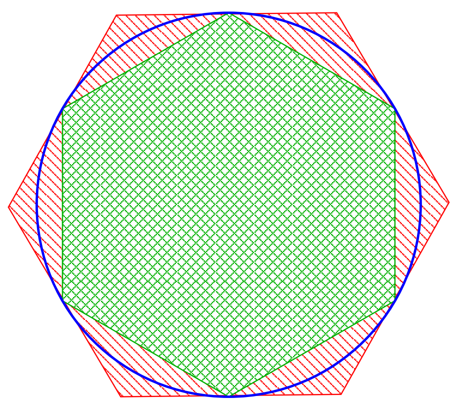
Eudoxe de Cnide (428-347 av. JC)

Il est le premier à expliciter l'opération de "passage à la limite". Il introduit la méthode "d'exhaustion" ancêtre de nos suites infinies d'approximations.

Archimède de Syracuse (287-212 av. JC)

Développe la méthode d'Eudoxe et l'applique à de nombreux calculs d'aires et de volumes. Il obtient ainsi :

$$3{,}1428 \approx 3 + \frac{1}{7} < \pi < 3 + \frac{10}{71} \approx 3{,}1408$$



Isaac Newton (1642-1727)

Co-inventeur, avec Leibnitz, du calcul intégral.
Motivé par des questions de physique.

Gottfried von Leibniz (1646-1716)

Co-inventeur, avec Newton, du calcul intégral.
Introduit un système de notation efficace (df/dx, $\int f(x)\mathrm{d}x$,...).

Note : Tous deux ont énoncé explicitement le théorème fondamental de l'analyse. Leurs méthodes étaient basées sur la notion très ambiguë de quantités infiniment petites non nulles (les infinitésimaux).

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Publie en 1821 un Cours d'analyse qui clarifie enfin la notion de limite (et en même temps celles de continuité et de dérivabilité) et permet d'éliminer les infinitésimaux.

Henri Lebesgue (1875-1941)

Découvre une nouvelle définition de l'aire valable non seulement pour les domaines quarrables mais aussi pour d'autres domaines plus compliqués.
Cette nouvelle notion d'aire conduit tout droit à une nouvelle intégrale (dite de Lebesgue), plus flexible que celle que nous avons présentée, notamment parce qu'elle s'applique à une classe encore plus grande de fonctions.