Thème : probabilités

L'exercice

1) On lance deux dés équilibrés à 6 faces et on note la somme des deux faces obtenues.
   1.a) Donner un univers associé cette expérience.
   1.b) A-t-on plus de chances d'obtenir 6 ou d'obtenir 7 ? Justifier.
2) On lance maintenant trois dés et on note la somme des faces obtenues. A-t-on autant de chances d'obtenir 9 que 10 ?

La solution proposée par trois élèves à la question 1.b)

Élève 1

Non, on n'a pas plus de chances d'obtenir 6 *ou d'obtenir* 7 *car le lancer est du pur hasard*

Élève 2

La probabilité de 6 *est* $\frac{3}{11}$.
La probabilité de 7 *est* $\frac{3}{11}$.
Il y a autant de chance car leurs probabilités sont égales.

Élève 3

On n'a pas plus de chances d'obtenir 6 *et* 7 *car pour* 6 *il faut* 1 *et* 5 *;* 2 *et* 4 *;* 3 *et* 3.
Pour 7 *il faut* 1 *et* 6 *;* 2 *et* 5 *;* 3 *et* 4.
Les issues on les même probabilités, on parle alors d'une situation d'équiprobabilité.

Le travail à exposer devant le jury

1- Quelles sont les connaissances et les compétences mises en œuvre dans cet exercice ?
2- Pour chacune des réponses, indiquez le raisonnement que l'élève a pu suivre et l'origine de ses éventuelles erreurs.
3- Proposez une correction de la question 2) telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
4- Présentez deux ou trois exercices mettant en jeu les probabilités, dont un au moins demandera une simulation.

Thème : optimisation

L'exercice

À partir d'un exercice d'un manuel donné ci-dessous, un professeur a proposé à ses élèves l'exercice suivant.

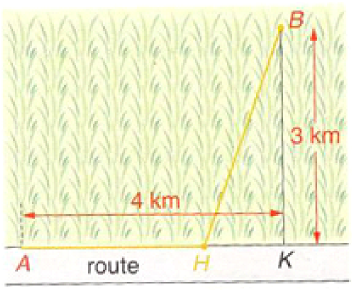
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{40} + \frac{1}{20}\sqrt{x^2 - 8x + 25}$$

1) Expliquez pourquoi la fonction f est dérivable et calculer sa dérivée.
2) Dressez le tableau de variation de f. Déterminer pour quelle valeur x_0 cette fonction admet un minimum.
3) Donnez les valeurs exactes, puis les valeurs approchées arrondies à 10^{-3} de x_0 et de $f(x_0)$.

L'exercice du manuel

Une voiture 4×4 doit aller d'un point A situé sur une route à un point B en traversant un champ.



Sachant que sa vitesse sur la route est de 40 km/h et que sa vitesse à travers champs est de 20 km/h, déterminer la position du point H pour que le temps mis pour aller de A à B soit minimal.

Hachette, Déclic Terminale S (2006)

Le travail à exposer devant le jury

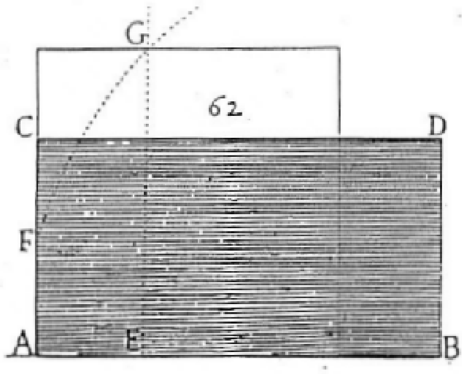
1- Comparez les compétences auxquelles les deux exercices ci-dessus font appel.
2- Citez différents logiciels permettant d'émettre une conjecture sur la solution de l'exercice du manuel et développez la mise en œuvre de l'un d'entre eux.
3- Proposez une correction de la question 2) de l'exercice du professeur comme vous la présenteriez à des élèves.
4- Présentez deux ou trois exercices sur le thème « optimisation ».

Thème : problèmes de construction

L'exercice

Voici une traduction en langage contemporain d'un document du XVIIe siècle écrit par le mathématicien hollandais Samuel Marolois (1572-1627).

Soit $ABDC$ un rectangle et F le milieu de $[AC]$. Le cercle de centre A et de rayon AF coupe $[AB]$ en E. Le cercle de centre B et de rayon BF coupe la perpendiculaire è (AB) passant par E en G.



GE est la longueur du côté d'un carré dont l'aire est égale à l'aire du rectangle $ABDC$.

Justifier la dernière affirmation du texte.

Les solutions proposées par deux élèves

Élève 1

Je fais une figure avec 4 cm *et 7* cm *et je vais démontrer que l'aire du carré vaut* $28\,\text{cm}^2$.

Avec le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BAF j'ai :

$$BF^2 = AB^2 + AF^2 = 49 + 4$$

Donc $BF^2 = 53$, $BF = \sqrt{53} = 7,28$.

dans le triangle rectangle EBG j'ai $GB^2 = EB^2 + EG^2$, $7,28^2 = 25 + EG^2$. J'obtiens $EG = 5,29$ donc l'aire du carré est 27,98. Les deux aires sont égales.

Élève 2

J'ai mesuré sur le dessin et j'ai trouvé 2,8 cm *et 5,3* cm.

Je vais démontrer que $GE^2 = 14,84\,\text{cm}^2$.

Pythagore dans le triangle EGB : $14,84 = GB^2 - EB^2 = FB^2 - 15,21$.

Or $FB^2 = 30,05$ (Pythagore dans le triangle FAB). D'où $14,84 = 30,05 - 15,21$ *vrai.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les compétences acquises et celles non acquises.

2- Quel peut être selon vous l'intérèt d'ètudier des notions à travers une approche historique ?

3- Exposez une correction de l'exercice comme vous le feriez devant une classe de troisième.

4- Présentez deux ou trois problèmes de construction, dont l'un au moins met en jeu un logiciel de géométrie dynamique.

Thème : problèmes avec prise d'initiative

L'exercice

Le directeur d'une salle de spectacle de 8000 places organise un concert. Il souhaite fixer le prix du billet pour optimiser sa recette. Une étude de marché lui apprend que :

- si le prix du billet est de 50 euros il vend 3000 billets ;
- chaque baisse de 0,60 euros sur le prix du billet lui permet de vendre 100 billets supplémentaires.

Déterminez le prix du billet pour que la recette soit maximale.

Objectif général du programme de seconde

L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :

- *modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;*
- *conduire un raisonnement, une démonstration ;*
- *pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ;*
- *faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ;*
- *pratiquer une lecture active de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ;*
- *utiliser les outils logiciels (ordinateur ou calculatrice) adaptés à la résolution d'un problème ;*
- *communiquer à l'écrit et à l'oral.*

Dans la mesure du possible, les problèmes posés s'inspirent de situations liées à la vie courante ou à d'autres disciplines.

Ils doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves. Au niveau d'une classe de seconde de détermination, les solutions attendues sont aussi en général simples et courtes.

Le travail à exposer devant le jury

1- Proposez une résolution de l'exercice par deux méthodes différentes, comme vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

2- Ciblez précisément les compétences mentionnées dans le programme de seconde que ces méthodes de résolution permettent de développer.

3- Présentez deux ou trois problèmes avec prise d'initiative.

Thème : algorithmique

L'exercice

On s'intéresse à l'algorithme suivant.

Entrer un entier naturel non nul n
Tant que $n \neq 20$ faire
Si $n < 20$ alors faire $n \leftarrow 2 \times n$
sinon faire $n \leftarrow n - 4$
Fin Si
Fin Tant que
Afficher n

1) Tester l'algorithme sur plusieurs entiers.
2) Émettre une conjecture concernant cet algorithme et la prouver.
3) Modifier l'algorithme pour qu'il affiche le nombre de boucles effectuées.

Des réponses proposées par trois élèves

Elève 1

1) J'ai testé avec 4, j'ai obtenu 8, avec 32, j'ai obtenu 28 et avec 10, j'ai obtenu 20.

Elève 2

2) L'algorithme finit toujours par afficher 20, même si ça prend du temps avec les grands nombres. En fait, pour les grands nombres, on enlève toujours 4, on finit donc par revenir vers des nombres qu'on a déjà testé avant. J'ai testé 1,2,3,...jusqu'à 20. Cela suffit pour montrer que la conjecture est en fait un théorème.

Elève 3

3) J'ai rajouté après le "fin si" l'instruction $k \leftarrow k + 1$, et j'ai demandé l'affichage de k après celui de n, mais ça me donne des résultats bizarres. C'est peut-être un bug de la machine.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses compétences dans le domaine de la logique et de l'algorithmique.
2- Proposez une correction de la question 2 telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
3- Présentez deux ou trois exercices faisant intervenir un algorithme.

Thème : géométrie plane

L'exercice

Tracer un cercle de centre O, et placer un point A à l'intérieur du disque ainsi défini.
Choisir un point M sur le cercle, et construire le symétrique M' de A par rapport à M.
Recommencer avec d'autres points du cercle.

Que fait M' quand M parcourt le cercle ?
On pourra construire le symétrique de A par rapport à O.

Un extrait du préambule des programmes de collège

> ***1. Divers aspects d'une démarche d'investigation.***
> *Cette démarche s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques). Les investigations réalisées avec l'aide du professeur, l'élaboration de réponses et la recherche d'explications ou de justifications débouchent sur l'acquisition de connaissances, de compétences méthodologiques et sur la mise au point de savoir-faire techniques.[...]*
> *Une séance d'investigation doit être conclue par des activités de synthèse et de structuration organisées par l'enseignant, à partir des travaux effectués par la classe. Celles-ci portent non seulement sur les quelques notions, définitions, résultats et outils de base mis en évidence, que les élèves doivent connaître et peuvent désormais utiliser, mais elles sont aussi l'occasion de dégager et d'expliciter les méthodes que nécessite leur mise en œuvre.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Proposez le scénario d'une séance permettant d'engager les élèves dans une démarche d'investigation prenant appui sur l'exercice.

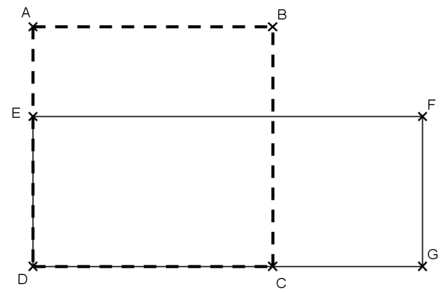
2- Exposez une correction de l'exercice comme vous le feriez devant une classe de collège.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie plane*, dont l'un au moins peut être le support d'une démarche d'investigation.

Thème : problèmes conduisant à la résolution d'équations

L'exercice

Le dessin ci-contre représente une figure composée d'un carré $ABCD$ et d'un rectangle $DEFG$.
E est un point du segment $[AD]$.
C est un point du segment $[DG]$.
Dans cette figure, la longueur AB peut varier mais on a toujours $AE = 15\,cm$ et $CG = 25\,cm$.



1) Dans cette question, on suppose que $AB = 40\,cm$.
   a) Calculer l'aire du carré $ABCD$.
   b) Calculer l'aire du rectangle $DEFG$.
2) Peut-on trouver la longueur AB de sorte que l'aire du carré $ABCD$ soit égale à l'aire du rectangle $DEFG$?
   Si oui, calculer AB. Si non, expliquer pourquoi.
   Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte.

La réponse de trois élèves à la question 2).

Elève 1
J'ai fait un tableau avec plusieurs valeurs, on voit que les deux aires vont être égales à un moment.

AB	*aire du carré* $ABCD$	*aire du rectangle* $DEFG$
40	1600	1625
30	900	825
35	1225	1200

J'ai essayé pile entre 35 *et* 40 *:* $37,5$. *C'est la bonne réponse !*

Elève 2
J'ai appelé I l'intersection de (EF) et (BC). Les deux aires sont égales si les rectangles $ABIE$ et $CGFI$ ont la même aire. Il faut donc que $15 \times AB = 25 \times GF$. C'est vrai pour $AB = 5$ et $GF = 3$. Donc il y a bien une solution.

Elève 3
Pour que les deux figures aient la même aire, il faut au moins qu'elles soient toutes les deux des carrés, mais ça n'est pas possible. Le problème n'a pas de solution.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions des trois élèves, et indiquez pour chacun comment vous pourriez l'aider à améliorer son raisonnement.

2- Proposez une correction de la question 2) telle que vous la présenteriez à des élèves de collège.

3- Présentez deux ou trois *problèmes pouvant conduire à la résolution d'équations.*