## 4.3 Énoncés de l'épreuve sur dossier

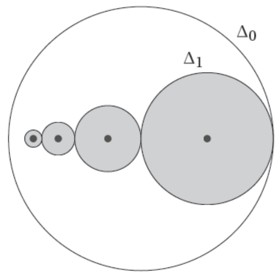
### 4.3.1 Exercice

**Thème : problèmes conduisant à l'étude de suites**



#### L'exercice

On construit une suite de disques tangents $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ comme sur la figure ci-contre. Deux disques consécutifs sont tangents et les centres de tous les disques sont alignés.
Le rayon de $\Delta_0$ est $R$, celui de $\Delta_{n+1}$ est la moitié de celui de $\Delta_n$. Montrer que tous les disques $\Delta_n$ sont situés à l'intérieur du disque $\Delta_0$.




#### Les réponses de deux élèves

***Élève 1***

*Sur le tableur, j'ai calculé les rayons des disques et la somme pour $R = 1$ et $R = 2$.*

| *Disque* | *Rayon* | *Total* | | *Disque* | *Rayon* | *Total* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 0,5 | 1,5 | | 2 | 1 | 3 |
| 3 | 0,25 | 1,75 | | 3 | 0,5 | 3,5 |
| 4 | 0,125 | 1,875 | | 4 | 0,25 | 3,75 |
| 5 | 0,0625 | 1,9375 | | 5 | 0,125 | 3,875 |
| 6 | 0,03125 | 1,96875 | | 6 | 0,0625 | 3,9375 |
| 7 | 0,015625 | 1,984375 | | 7 | 0,03125 | 3,96875 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 20 | 1,91E−06 | 1,999998 | | 20 | 3,81E−06 | 3,999996 |
| 21 | 9,54E−07 | 1,999999 | | 21 | 1,91E−06 | 3,999998 |
| 22 | 4,77E−07 | 2 | | 22 | 9,54E−07 | 3,999999 |
| 23 | 2,38E−07 | 2 | | 23 | 4,77E−07 | 4 |
| 24 | 1,19E−07 | 2 | | 24 | 2,38E−07 | 4 |
| 25 | 5,96E−08 | 2 | | 25 | 1,19E−07 | 4 |
| 26 | 2,98E−08 | 2 | | 26 | 5,96E−08 | 4 |

*On voit donc que la somme ne dépasse pas deux fois le rayon, donc les disques sont intérieurs à $\Delta_0$.*

***Élève 2***

*Le rayon du $2^e$ disque est $\dfrac{R}{2}$, celui du $3^e$ disque est $\dfrac{R}{4}$..., celui du $n^e$ disque est $\dfrac{R}{2^n}$.*
*Mais je ne sais pas calculer $R + \dfrac{R}{2} + \dfrac{R}{4} + \ldots + \dfrac{R}{2^n}$.*

#### Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les compétences qu'il a acquises.

2- Proposez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème des *suites* dont l'un au moins fera appel à une modélisation.

## Thème : probabilités

**L'exercice**

Dans une fête foraine, un jeu de hasard est proposé aux visiteurs.
Pour chaque partie, la participation est de 5 euros.
Une partie consiste à lancer un dé à six faces, numérotées de 1 à 6. Pour un résultat supérieur ou égal à 5, le joueur reçoit 15 euros, sinon il ne reçoit rien.

1. L'organisateur espère qu'il y aura au moins 1000 parties de jouées. Peut-on penser qu'il gagnera de l'argent ?
2. À la fin de la journée, l'organisateur fait ses comptes : il constate que 2000 parties ont été jouées et il a amassé 2650 euros de gain.
   a) Combien de parties ont-elles été gagnées par les joueurs ?
   b) Peut-on considérer que le dé est équilibré ?

**Les réponses proposées par trois élèves de Première S à la question 1**

*Élève 1*

*Je suppose qu'il y a exactement 1000 parties jouées, et je nomme $X$ le nombre de parties gagnées par les joueurs.*

*$X$ suit la loi binomiale $B\left(1000, \frac{1}{3}\right)$. D'après la calculatrice, $P(X \leqslant 500) \approx 1$*

*On est à peu près sûr que plus de la moitié des parties seront perdues par les joueurs. L'organisateur devrait donc gagner de l'argent.*

*Élève 2*

*Avec un tableur, j'ai réalisé une simulation de* 1000 *parties. J'ai obtenu* 345 *parties gagnées.*

$$\frac{345 \times 10 - 655 \times 5}{1000} = 0,175.$$

*En moyenne, je trouve un gain de* 0,17 *euro par partie pour le joueur.*
*L'organisateur ne va donc pas gagner d'argent.*

*Élève 3*

*Je suppose qu'il y a exactement* 1000 *parties jouées. La probabilité de gagner est de* $\frac{1}{3}$.

*On a donc environ* $\frac{1}{3} \times 1000$ *parties de gagnées.*

*L'organisateur devrait gagner :* $1000 \times 5 - \frac{1}{3} \times 1000 \times 15 = 0$.

**Le travail à exposer devant le jury**

1- Analysez la réponse des trois élèves en mettant en évidence leurs compétences dans le domaine des probabilités.

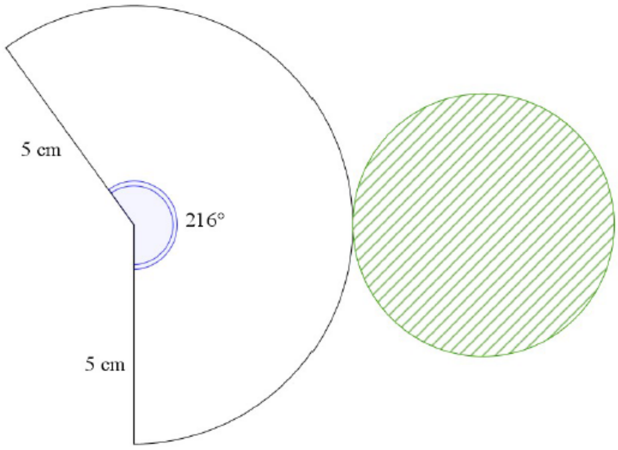
2- Proposez une correction de la deuxième question telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *probabilités*, dont l'un au moins s'appuiera sur une simulation.

**Thème : volumes**

## L'exercice

Un cône de révolution a pour patron la figure ci-contre.




Déterminer le volume de ce cône.

## Les réponses de deux élèves de seconde

***Élève 1***

*La base a comme aire* $15\pi\ cm^2$*. Je le trouve par proportionnalité :*

| | | |
|---|---|---|
| *angle* | *360* | *216* |
| *aire* | $25\pi$ | $15\pi$ |

*J'utilise un triangle rectangle et Pythagore pour trouver la hauteur du cône.*
$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 5^2 - \left(\sqrt{15}\right)^2 = 10$, *donc* $AB = \sqrt{10}$ *cm.*
*Le volume du cône est* $\dfrac{b \times h}{3} = \dfrac{15\pi \times \sqrt{10}}{3} = 5\pi\sqrt{10} \approx 49,7\ cm^3$.

***Élève 2***

| | | |
|---|---|---|
| *angle* | *360* | *216* |
| *longueur* | *5* | *3* |

*Le rayon du cercle de base est* 3 *cm.*

*Le volume du cône est* $\dfrac{b \times h}{3}$.
*Ici* $B = 2 \times 3 \times \pi = 6\pi\ cm^2$ *et* $h = 5$*, donc le volume est* $\dfrac{b \times h}{3} = \dfrac{6\pi \times 5}{3} = 10\pi\ cm^3$.

## Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions des élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs.

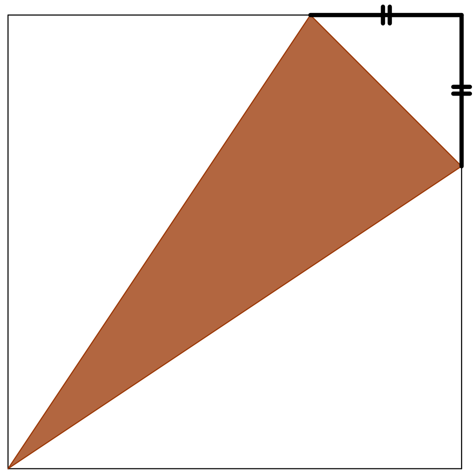
2- Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3- Proposez au moins deux exercices sur le thème *aires et volumes* concernant des niveaux de classe différents.

## Thème : fonctions

### L'exercice du professeur

On dispose d'un terrain carré de 20 mètres par 20 mètres. On veut installer un parterre de fleurs, représenté sur le schéma ci-dessous par la zone grisée.



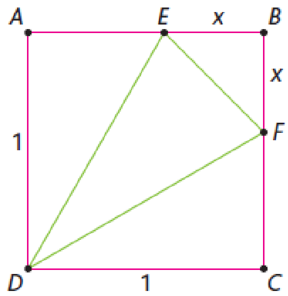
Peut-on construire un parterre de fleurs qui occupe une surface de 150 m$^2$ ? De 128 m$^2$ ? De 100 m$^2$ ?

### Un extrait du manuel Hachette Déclic seconde

**54 Variations de l'aire d'un triangle**

*ABCD* est un carré de côté 1.
On place les points $E$ et $F$ respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ tels que $EB = BF = x$.

**On étudie les variations de l'aire du triangle *EFD* en fonction de *x*.**




**1.** À quel intervalle $x$ appartient-il ?

**2.** Exprimer en fonction de $x$ les aires des triangles *EBF*, *FCD* et *AED*.

**3.** Montrer que l'aire du triangle *EFD* en fonction de $x$ est : $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + x$.

**4. a.** Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

**b.** En déduire l'écriture de $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-\alpha)^2 + \beta.$$

**5.** Donner le tableau de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;1]$.

### Le travail à exposer devant le jury

1- Comparez les deux versions de l'exercice en indiquant quelles aptitudes elles permettent de développer chez les élèves.

2- Proposez une correction de l'exercice du professeur telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *fonctions*.

**Thème : arithmétique**

### L'exercice

Pour coder un message à l'aide d'un chiffrement affine, on commence par remplacer chaque lettre de l'alphabet par un nombre entier de 0 à 25, selon le tableau ci-dessous. Les autres signes du texte sont ignorés.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | ... | X | Y | Z |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... | 23 | 24 | 25 |

Puis on utilise une fonction affine de chiffrement $f(x) = ax + b$, avec $(a, b)$ un couple d'entiers compris entre 0 et 25.
Enfin, on prend le reste de la division par 26 de $f(x)$ pour obtenir le codage voulu. Pour que $f(x)$ soit une fonction de chiffrement, il faut que les transformations de deux lettres distinctes donnent deux lettres distinctes.

1. Les fonctions affines suivantes peuvent-elles être utilisées comme fonctions de chiffrement ?
   $f : x \longmapsto 13x + 3$ $\qquad$ $g : x \longmapsto 3x + 7$
2. On souhaite choisir comme fonction affine de chiffrement une fonction qui permet de coder $C$ en $M$ et $K$ en $A$. Montrer que la fonction $h : x \longmapsto 5x + 2$ convient et coder « ALLO » à l'aide de cette fonction.
3. On appelle fonction de décodage de la fonction $h$, la fonction de chiffrement $k : x \longmapsto ax + b$ telle que $k[h(x)] \equiv x\,[26]$, pour tout nombre entier $x$.
   a) Montrer que $5a \equiv 1\,[26]$ si et seulement si $a \equiv 21\,[26]$
   b) En déduire une fonction de décodage de la fonction $h$.

### La réponse d'un élève

1. *J'ai prolongé le tableau fourni dans une feuille de calcul tableur pour représenter les fonctions $f$ et $g$ et j'ai constaté que $g$ était un code mais pas $f$.*
2. *$C$ a pour valeur $2$, $f(2) = 12$ qui est bien la valeur de $M$. $K$ a pour valeur $10$, $f(10) = 52$ qui est un multiple de $26$, donc donne bien $A$. « ALLO » est codé « CFFU »*
3. *a)* $5 \times 21 = 105 = 4 \times 26 + 1$

   *b) je cherche la fonction $l$ de la forme $l(x) = 21x + b$ qui permet de transformer $M$ en $C$ et $A$ en $K$, puisqu'il me reste une inconnue, je prends $A$ car sa valeur vaut $0$, et $l(0) = b = 10$. Je vérifie que ça marche aussi sur $M$ : $l(12) = 262$ qui est congru à $2$ modulo $26$.*

### Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de l'élève en mettant en évidence ses réussites et les progrès qu'il doit réaliser.

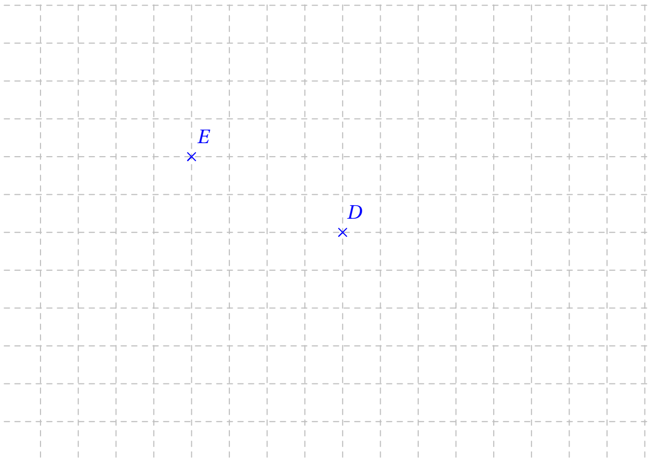
2- Proposez une correction de la question 3 telle que vous la présenteriez devant une classe de terminale S spécialité mathématiques.

3- Présentez deux ou trois exercices d'arithmétique au lycée, dont l'un au moins fait appel à des congruences.

## Thème : géométrie plane

### L'exercice du professeur

Un explorateur en plein désert veut atteindre une oasis.
Il dispose d'une carte où les lieux remarquables ont été repérés par des lettres. L'oasis se trouve au point $H$.
Malheureusement, les points $A, B, C, F, G$ et $H$ ont été effacés, et seuls les points $D$ et $E$ sont encore visibles.




Heureusement, l'explorateur se souvient que le point $G$ est situé au milieu des segments $[EF]$ et $[DA]$, que $E$ est le milieu de $[AC]$, $B$ celui de $[CF]$, et $D$ celui de $[BH]$.
Peut-il retrouver l'oasis ?

*D'après une épreuve du rallye de mathématiques Champagne Ardennes Niger (2009)*

### Les réponses de deux élèves

***Élève 1***

*Puisque $G$ milieu de $[EF]$ et de $[DA]$, $E$, $F$, $D$ et $A$ sont sur un même cercle de centre $G$. J'ai placé la pointe du compas pour avoir un cercle qui passe par $E$ et $D$, j'ai donc trouvé $G$. J'ai placé les autres points et j'ai trouvé $H$.*

***Élève 2***

*Puisque $G$ est le milieu de $[EF]$ et de $[DA]$ alors $EDFA$ est un parallélogramme car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. J'ai placé $F$ au hasard, puis j'ai placé $G$ milieu de $[EF]$.*
*Comme $G$ est le milieu de $[DA]$, j'ai tracé le symétrique de $D$ par rapport à $G$ pour en déduire le point $A$. J'ai ensuite placé $C$ de la même façon.*
*J'ai remarqué que $ECDF$ est un parallélogramme car tous ses côtés opposés sont parallèles.*
*J'ai donc placé $B$ au milieu de $[ED]$ et j'ai trouvé $H$.*

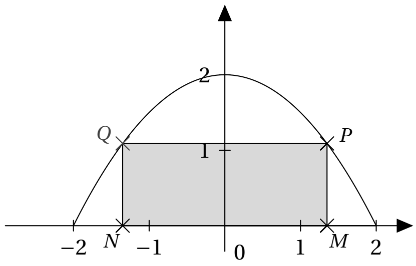
### Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les réponses des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs.
2- Proposez une correction de l'exercice telle que vous la présenteriez devant une classe de collège.
3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie plane*, dont un problème de construction.

## Thème : problème d'optimisation

### L'exercice

La parabole d'équation $y = -0,5x^2 + 2$ a été représentée ci-contre.
Pour tout $x \in [0,2]$, on construit à partir du point $M(x,0)$, les points $P$, $Q$ et $N$, avec $P$ et $Q$ sur la parabole et $MNQP$ rectangle.
Existe-t-il un rectangle d'aire maximale ?
Si oui, est-il unique ?

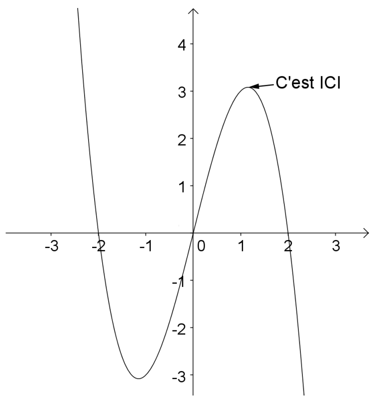



*Source : d'après MATHS Analyse 1ère S, collection TERRACHER*

### Les solutions de deux élèves de première S

***Élève 1***

$y = MN = -0,5x^2 + 2$
$A = 2x \times y$
$A = 2x(-0,5x^2 + 2)$
$A = -x^3 + 4x$




***Élève 2***

*Je pense que le rectangle est un carré car on a fait un exercice disant que le rectangle qui a la plus grande aire est un carré.*

$x = -0,5x^2 + 2$
$-0,5x^2 + 2 - x = 0,$
$\triangle = 5$, *il y a deux solutions dans* $\mathbb{R}$ : $x_1 = 1,236$ *et* $x_2 = -3,236$.

*Mais* $x \in [0;2]$ *donc* $x = 1,236$, $f(x) = 1,236$.
*On vérifie avec la calculatrice :* $f(1,2) = 1,28$ *et* $f(1,3) = 1,155$. *On dirait que c'est faux.*

### Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les démarches des élèves en mettant en avant les compétences mathématiques acquises.
2- Exposez une correction de cet exercice, prenant en compte les productions des élèves, devant une classe de première.
3- Présentez deux ou trois *problèmes d'optimisation* dont l'un au moins se situe au niveau de la classe de seconde.

## Thème : suites

### L'exercice

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$

1. Écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel $n$ donné, tous les termes de la suite du rang 0 au rang $n$ .
2. Quelles conjectures peut-on émettre concernant le sens de variation et la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $v_n$ est bien défini et $0 < v_n < 3$.
4. Étudier le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ . Que peut-on en conclure ?
5. Après avoir justifié que la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$ est arithmétique, déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

### Les réponses proposées par deux élèves de terminale S à la question 1

***Élève 1***

**début**
  **Entrées** : $n$
  $1 \rightarrow v$ ;
  $1 \rightarrow i$ ;
  **tant que** $i \leqslant n$ **faire**
    $9 \div (6-v) \rightarrow v$ ;
  **fin**
  **Sorties** : *Afficher* $v$.
**fin**

***Élève 2***

**début**
  **Entrées** : $n$
  $1 \rightarrow i$ ;
  **pour** $i = 1$ *à* $n$ **faire**
    $1 \rightarrow v$ ;
    $9 \div (6-v) \rightarrow v$ ;
  **fin**
  **Sorties** : *Afficher* $v$.
**fin**

### Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la réponse des deux élèves. Vous mettrez en évidence leurs compétences dans le domaine de l'algorithmique et proposerez le cas échéant les modifications nécessaires.

2- Proposez une correction des questions 3 et 5 telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème des *suites*, dont l'un au moins comprendra la mise en œuvre d'un algorithme.

## Thème : probabilités

### L'exercice

Amédée propose à Célestin de jouer aux dés. Il sort trois dés d'une boîte : un rouge, un vert et un bleu.
Célestin s'étonne : « Tes dés sont étranges ! Le rouge a deux 3, deux 4 et deux 8 ! ».
Amédée répond : « Oui, ils sont tous spéciaux : le vert a deux 1, deux 5 et deux 12, et quant au bleu, il a deux 2, deux 6 et deux 7. Je te propose de jouer avec : on choisit chacun un dé, on le lance et celui qui fait le plus grand résultat a gagné. Pour te prouver que ce n'est pas truqué, je te laisse choisir ton dé en premier. »
Que pensez-vous de la proposition d'Amédée ?

### Les réponses proposées par deux élèves de seconde

***Élève 1***

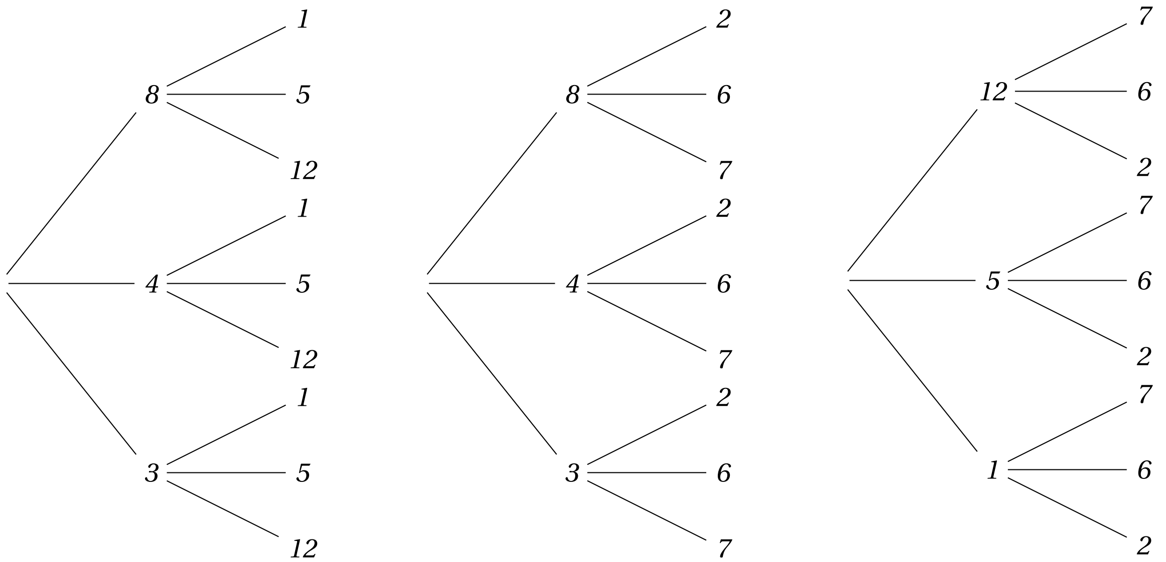
*Pour savoir quel est le meilleur dé, je calcule le résultat moyen :*

*Dé rouge :* $\dfrac{2\times3+2\times4+2\times8}{6}=5$ *Dé vert :* $\dfrac{2\times1+2\times5+2\times12}{6}=6$ *Dé bleu :* $\dfrac{2\times2+2\times6+2\times7}{6}=5$

*On peut jouer en choisissant le dé vert.*

***Élève 2***

*Dé rouge contre dé vert* | *Dé rouge contre dé bleu* | *Dé vert contre dé bleu*




*Le dé rouge gagne 4 fois sur 9* | *Le dé rouge gagne 4 fois sur 9.* | *Le dé vert gagne 4 fois sur 9*

*Conclusion : c'est le dé bleu qui est le meilleur, puisqu'il gagne 5 fois sur 9 contre le dé rouge et le dé vert.*

### Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs compétences dans le domaine des probabilités.

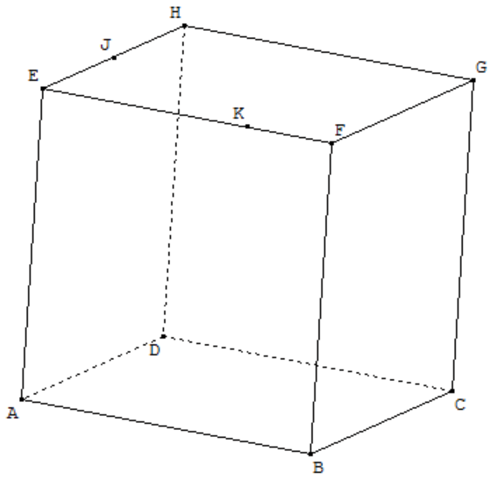
2- Proposez une correction de l'exercice telle que vous la présenteriez devant une classe de seconde.

3- Présentez trois exercices sur le thème *probabilités* à des niveaux de classe différents.

## Thème : calcul de longueurs

### L'exercice du professeur

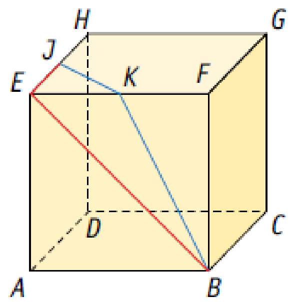
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a obtenu la représentation d'un cube d'arête 5 cm.
Le point $J$ est le milieu de l'arête $[EH]$ et le point $K$ est un point quelconque de l'arête $[EF]$.
On cherche le trajet le plus court entre $J$ et $B$ qui passe par l'arête $[EF]$.




1. a) Reproduire la figure grâce au logiciel.
   b) Construire les segments $[JK]$ et $[KB]$. Afficher la longueur $JK + KB$.
   c) En faisant bouger le point $K$, trouver la position de $K$ qui rende le trajet total $JKB$ le plus court possible.
2. a) Créer un patron du cube.
   b) Où faut-il placer $K$ pour que le trajet soit le plus court possible ?
   c) Calculer la longueur exacte de ce trajet.

### Un extrait du manuel Hachette phare quatrième

**52 Géométrie dans l'espace**
Le cube ci-contre a pour arête 6 cm.
Le point $J$ est le milieu de l'arête $[EH]$. Le point $K$ est le milieu de l'arête $[EF]$.
**1) a)** Calculer la longueur $BE + EJ$, arrondie au millimètre près.
**b)** Calculer la longueur $BK + KJ$, arrondie au millimètre près.
**c)** Comparer la longueur du trajet rouge et la longueur du trajet bleu.
**2) a)** Dessiner un patron de ce cube tel que la face $ABFE$ et la face $EFGH$ aient une arête commune.
Sur ce patron, tracer en vert le trajet le plus court entre les points $B$ et $J$.
**b)** Calculer la longueur du trajet vert, arrondie au millimètre près.




*N.B. dans l'exercice du manuel, le trajet rouge est le trajet $JEB$ et le trajet bleu est le trajet $JKB$*

### Le travail à exposer devant le jury

1- Comparez les deux versions de l'exercice en précisant les compétences qu'elles permettent de développer chez les élèves.

2- Proposez une correction des questions 2.b) et 2.c) de l'exercice du professeur, telle que vous l'exposeriez devant une classe de quatrième.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *calcul de longueur* dont l'un au moins pourra conduire à utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

**Thème : optimisation**

## L'exercice

On veut construire un triangle $ABC$ isocèle en $A$ tel que $AB = AC = 10$.
Quelle est l'aire maximale d'un tel triangle ?

## Les démarches de deux élèves de terminale scientifique

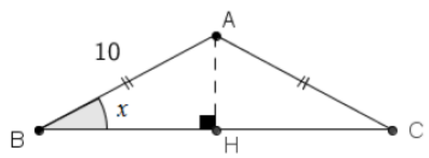
***Élève 1***

*Avec un logiciel de géométrie, je crée un segment* $[AB]$ *de longueur* 10.
*Je place* $C$ *sur le cercle de centre* $A$ *passant par* $B$.
*En déplaçant* $C$ *sur ce cercle, je vois que l'aire maximale du triangle* $ABC$ *est* 50.

***Élève 2***

*Je nomme* $x$ *la mesure de l'angle orienté* $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ *avec* $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

*Je calcule* $AH$ *et* $BH$ *et l'aire vaut* $100\sin(x)\cos(x)$ . *En dérivant, je trouve* $100\cos^2(x) - 100\sin^2(x)$ .




*Avec le tableur de ma calculatrice, je lis que la dérivée s'annule pour* $x = 0,8$ *environ. Ce qui donne une aire maximale de* 49,98 *environ.*

## Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses compétences et celles qu'il conviendrait de développer.

2- Exposez une correction de cet exercice telle que vous la présenteriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *optimisation* dont l'un au moins peut amener à utiliser un logiciel.

**Thème : problèmes conduisant à une résolution d'équation**

## L'exercice

Dans un récipient cylindrique de rayon 10 cm et de hauteur 30 cm, on place une bille de rayon 4 cm.
On verse de l'eau jusqu'à recouvrir exactement la bille (la surface de l'eau est alors tangente à la bille qui se trouve au fond du récipient). On retire ensuite la bille, et on la remplace par une autre bille de rayon $R$ différent de 4 cm.
La question que l'on se pose est la suivante :
Est-il possible que l'eau recouvre exactement la nouvelle bille ?

On pourra montrer que le problème se ramène à la résolution de l'équation (E) : $x^3 - 150x + 536 = 0$

*D'après Déclic TS collection HACHETTE*

## Les réponses de deux élèves de terminale S pour la résolution de l'équation

***Élève 1***

*(E) est définie et continue sur* $[7{,}07\,;\,10]$.
*(E) est strictement croissante sur* $[7{,}07\,;\,10]$.
*D'après le théorème des valeurs intermédiaires, (E) admet une unique solution sur* $[7{,}07\,;\,10]$.
*À la calculatrice, j'obtiens :* $9{,}7 \leqslant R \leqslant 9{,}8$.
*Conclusion : il y a bien une autre bille dont le rayon est environ* 9,8 *cm.*

***Élève 2***

*J'ai essayé de factoriser et avec ma calculatrice, j'ai obtenu*

$$x^3 - 150x + 536 = (x-4)(x^2 + 4x - 134)$$

*Maintenant je calcule* $\Delta = 552$. *Il y a donc deux autres solutions qui sont environ* 9,8 *cm et une autre négative qui ne compte pas car une longueur est toujours positive.*

## Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les compétences acquises par chacun d'eux.

2- Proposez une correction de la modélisation permettant d'obtenir l'équation proposée telle que vous l'exposeriez devant une classe.

3- Présentez deux ou trois *problèmes conduisant à une résolution d'équation.*

**Thème : fluctuation d'échantillonnage**

## L'exercice

Le pôle recherche d'une entreprise a recruté ces trois dernières années soixante-quinze personnes. Vingt d'entre elles sont des femmes. Sachant que dans le secteur concerné 37 % des diplômés sont des femmes, un responsable syndical souligne la sous-représentation des femmes au sein du pôle recherche.
Quels arguments mathématiques peuvent appuyer ou bien remettre en cause son affirmation ?

## Les réponses proposées par deux élèves de seconde

***Élève 1***

*La proportion de femmes recrutées dans le pôle est de* $20/75 \approx 0{,}27$, *soit* 27 %, *ce qui est nettement insuffisant par rapport aux* 37 % *de diplômés. Le syndicaliste a raison, c'est le problème dont ils ont parlé hier aux infos.*

***Élève 2***

*Je peux appliquer les résultats sur la fluctuation avec* $n = 75$ *et* $p = 0{,}37$. *D'après ma calculatrice, l'intervalle de fluctuation au seuil de* 95 % *est* $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = [0{,}25\,;\,0{,}49]$.
*On est dans l'intervalle, il n'y a pas de discrimination.*

## Le travail à exposer devant le jury

1 – Commentez le travail de chacun des deux élèves, en mettant en évidence leurs acquis et leurs erreurs éventuelles.

2 – Proposez une correction de cet exercice comme vous le feriez devant une classe de première S.

3 – Présentez deux ou trois exercices sur le thème *fluctuation d'échantillonnage* dont l'un au moins fait appel à l'utilisation d'un logiciel.

**Thème : matrices et suites**

### L'exercice

On considère une population d'êtres vivants qui ne peuvent se trouver que dans deux états désignés par A et B. À l'instant initial, 34 % des êtres vivants de cette population sont dans l'état A.
On propose le modèle d'évolution suivant : à chaque heure,

- 3 % des êtres vivants qui étaient dans l'état A passent dans l'état B,
- 3,5 % des êtres vivants qui étaient dans l'état B passent dans l'état A.

1. Avec ce modèle, y aura-t-il plus d'êtres vivants dans l'état A que dans l'état B au bout d'un jour ?
2. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un certain nombre d'heures la proportion d'êtres vivants se trouvant dans l'état A va se stabiliser ? Si oui, préciser vers quelle valeur.

### Les réponses de trois élèves de terminale à la question 1

***Élève 1***

$u_{24} = 1{,}005^{24} \times 34 \approx 38{,}3$
*Au bout de* 24 *heures, cela reste inférieur à* 50 %.

***Élève 2***

*Dans le tableur :* $A1 = 34$ $\quad B1 = 66$
$A2 = A1 - 3\,\% * A1 + 3{,}5\,\% * B1$ $\quad B2 = 100 - A2$

*En tirant, j'obtiens* $A25 = 49{,}891$. *Cela ne dépassera pas* 50 % *au bout d'un jour.*

***Élève 3***

*Posons* $T = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}035 & 0{,}965 \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \end{pmatrix}$
*On a* $A \times T^{24} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$
*Il y a autant d'êtres vivants dans l'état A que dans l'état B.*

### Le travail à exposer devant le jury

1- Explicitez les démarches des élèves en mettant en évidence les compétences mathématiques acquises.

2- Proposez une correction la question 2 de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S, spécialité mathématiques.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *matrices et suites*.

## Thème : équations différentielles

### L'exercice

Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on propose plusieurs modèles. On appelle $N$ la fonction représentant le nombre de poissons en fonction du temps $t$ (exprimé en année). On sait que $N(0) = 2000$.

1. On suppose dans cette question que la fonction $N$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y' = ry$$

où $r$ est une constante strictement positive.

   a) Résoudre l'équation différentielle $(E_1)$.

   b) Donner l'expression de la fonction $N$.

   c) Représenter à l'aide d'un logiciel de géométrie les fonctions $N$ lorsque $r$ varie dans l'intervalle $[0, 4]$.

2. On suppose dans cette question que la fonction $N$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = 2y\left(1 - \frac{y}{4000}\right).$$

On admet que $N$ est définie et strictement positive sur $[0; +\infty[$.

On pose, pour $t \in [0; +\infty[$, $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.

   a) Démontrer que $g$ est solution sur $I$ de l'équation différentielle $(E') : y' = -2y + \dfrac{1}{2000}$.

   b) Résoudre, en utilisant éventuellement un logiciel de calcul formel, l'équation différentielle $(E')$.

   c) En déduire que sur $]0; +\infty[$ :

$$N(t) = \frac{4000}{\mathrm{e}^{-2t} + 1}.$$

### Un extrait des programmes de STS sur les équations différentielles (BO du 4 juillet 2013)

*On s'attache à relier les exemples étudiés avec les enseignements scientifiques et technologiques, en montrant l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale. L'utilisation des outils logiciels est sollicitée ; elle a pour finalités :*

- *de mettre en évidence, expérimentalement, la signification ou l'importance de certains paramètres ou phénomènes ;*
- *de dépasser la seule détermination des solutions d'une équation différentielle en donnant la possibilité de visualiser des familles de courbes représentatives de ces solutions ;*
- *de permettre, avec l'aide du calcul formel, de donner une expression des solutions dans certains cas complexes. Si, dans ce module, on développe plus particulièrement deux types d'équations différentielles, on est également attentif à donner une vision plus large de ces notions en présentant des équations différentielles dont on ne peut donner qu'une solution approchée tout en faisant saisir des principes généraux comme la notion de famille de solutions.*

### Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez dans quelle mesure cet exercice correspond aux attentes du programme de STS.

2- Proposez une correction de la question 2 telle que vous la présenteriez devant une classe de STS.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *équations différentielles*.