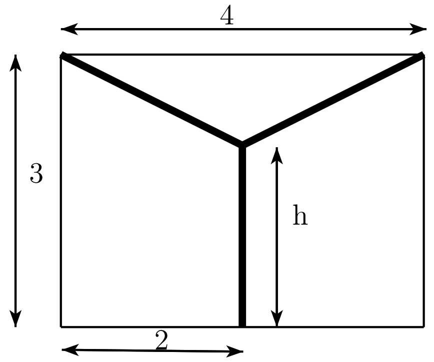
Thème : optimisation

L'exercice

On souhaite mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir. Ci-dessous le plan de cette façade ainsi que quelques dimensions, exprimées en mètre. Les trois tuyaux apparaissent en gras.



On cherche pour quelle hauteur h du tuyau vertical la longueur totale de tuyau à acheter est minimale.

1. Calculer en fonction de h la longueur $L(h)$ totale de tuyau nécessaire.
2. On considère la fonction g définie par : $g(h) = \sqrt{h^2 - 6h + 13} + 2h - 6$. Étudier le signe de cette fonction.
3. Étudier les variations de la fonction L et conclure.

La réponse d'un élève à la question 2

$\sqrt{h^2 - 6h + 13} + 2h - 6 = 0$
$\sqrt{h^2 - 6h + 13} = -(2h - 6)$
$\sqrt{h^2 - 6h + 13} = 6 - 2h$
$h^2 - 6h + 13 = 36 - 24h + 4h^2$
$3h^2 - 18h + 23 = 0$
Les solutions sont $h_1 = 3 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$ *et* $h_2 = 3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$
Donc le signe de la fonction g est :
$g \geqslant 0$ *pour* $h \in]-\infty; h_1] \cup [h_2; +\infty[$
$g \leqslant 0$ *pour* $h \in [h_1, h_2]$

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de l'élève en mettant en évidence ses connaissances et savoir-faire dans la résolution d'équations et d'inéquations.

2- Proposez une correction de la question 3 telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *optimisation*, dont l'un au moins amène les élèves à émettre une conjecture.

Thème : problèmes avec prise d'initiative

L'exercice

Sur l'autoroute, une voiture se trouve juste derrière un camion au moment où elle décide de s'arrêter sur une aire de repos. Le conducteur prend une pause de 10 minutes puis repart et règle son régulateur de vitesse sur 110 km/h. Le camion, quant à lui, roule à une vitesse constante de 90 km/h tout au long de son trajet. Au bout de combien de temps (et de combien de kilomètres) la voiture rattrapera-t-elle le camion ?

La solution proposée par trois élèves

Élève 1

La vitesse de la voiture est de 110 *km/h, celle du camion de* 90 *km/h. On en déduit une fonction* $f(x)$ *qui calcule la distance parcourue par la voiture et une fonction* $g(x)$ *qui calcule celle du camion. Soit* $f(x) = \dfrac{110}{60}x$ *et* $g(x) = \dfrac{90}{60}x$*, où* x *est le temps en minutes. Sachant que la voiture fait une pause de* 10 *minutes, le camion prend alors une avance de* $g(10) = 15km$*. Or d'après le tableur :*

min	$f(x)$	$g(x)$
45	$82,5$	$67,5$

Il y a exactement 15 *km d'écart entre les deux véhicules au bout de* 45 *minutes. Il a donc fallu* 45 *minutes et* $82,5$ *km à la voiture pour rattraper le camion.*

Élève 2

Quelle distance parcourt le camion en 10 *minutes ?*

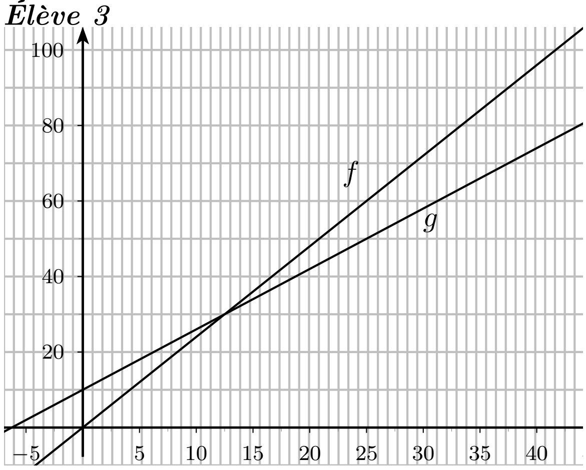
$\dfrac{10}{60} = 0,16$. $d = v \times t = 90 \times 0,16 = 15$ *km. Donc en* 10 *minutes, il parcourt* 15 *km.*

En combien de temps la voiture va-t-elle parcourir les 15 *km pour rattraper le camion ?*

$t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{115}{110} = 0,13$.*On convertit les heures en minutes :* $0,13 = 8,18$ *min.*

La voiture met $8,18$ *minutes en* 15 *km pour rattraper le camion.*

Élève 3



f représente l'évolution en km de la voiture dans le temps et g celle du camion. On remarque qu'au bout de $12,5$ *minutes la voiture rattrape le camion et que ça fait à peu près* 30 *km.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et en indiquant l'origine possible de ses éventuelles erreurs.

2- Corrigez cet exercice comme vous le feriez devant une classe de seconde.

3- Proposez deux ou trois *problèmes avec prise d'initiative* dont l'un au moins pourrait être proposé en collège.

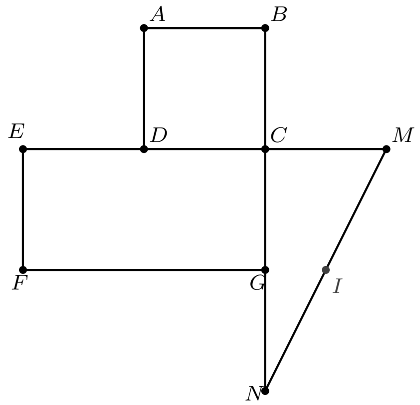
Thème : géométrie analytique

L'exercice

Dans la figure ci-contre :

- $ABCD$ est un carré ;
- $ECGF$ est un rectangle ;
- les points B, C, G, N sont alignés ;
- les points E, D, C, M sont alignés ;
- $DC = DE = EF = CM = GN$.
- I est le milieu du segment $[MN]$.

Les droites (AM) et (EI) sont-elles parallèles ?
On pourra se placer dans le repère (D, C, A).



Les réponses proposées par quatre élèves

Élève 1

Les droites ne se croisent pas sur le dessin, sauf si on les prolonge. Donc, oui elles sont parallèles.

Élève 2

On a $\overrightarrow{AM}\,(2; -1)$ *et* $\overrightarrow{EI}\,(2,5; -1)$.
Les vecteurs ne sont pas égaux, donc les droites ne sont pas parallèles.

Élève 3

$AM = \sqrt{5}$ *et* $IE = \sqrt{(-1-1,5)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{7,25}$.
Les longueurs sont différentes, donc les droites ne sont pas parallèles.

Élève 4

Pour (AM), on avance de deux et on descend de 1, alors que pour (EI), quand on avance de deux, on descend de moins de 1, donc les droites ne sont pas parallèles.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analyser les productions des élèves, en précisant les connaissances et savoir-faire mis en œuvre dans le domaine de la géométrie analytique.

2- Proposer une correction de cet exercice telle que vous la présenteriez devant la classe, en tenant compte des différentes réponses obtenues.

3- Proposez deux ou trois exercices de géométrie analytique.

Thème : algorithmique

L'exercice

On s'intéresse à l'algorithme suivant.

```
Entrer un entier naturel non nul n
        Tant que n ≠ 20 faire
                Si n < 20 alors faire n ← 2 × n
                        sinon faire n ← n − 4
                Fin Si
        Fin Tant que
Afficher n
```

1) Tester l'algorithme sur plusieurs entiers.
2) Émettre une conjecture concernant cet algorithme et la prouver.
3) Modifier l'algorithme pour qu'il affiche le nombre de boucles effectuées.

Des réponses proposées par trois élèves

Elève 1

1) J'ai testé avec 4, j'ai obtenu 8, avec 32, j'ai obtenu 28 et avec 10, j'ai obtenu 20.

Elève 2

2) L'algorithme finit toujours par afficher 20, même si ça prend du temps avec les grands nombres. En fait, pour les grands nombres, on enlève toujours 4, on finit donc par revenir vers des nombres qu'on a déjà testé avant. J'ai testé 1,2,3,...jusqu'à 20. Cela suffit pour montrer que la conjecture est en fait un théorème.

Elève 3

3) J'ai rajouté après le "fin si" l'instruction $k \leftarrow k+1$, et j'ai demandé l'affichage de k après celui de n, mais ça me donne des résultats bizarres. C'est peut-être un bug de la machine.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses compétences dans le domaine de la logique et de l'algorithmique.

2- Proposez une correction de la question 2 telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3- Présentez deux ou trois exercices faisant intervenir un algorithme.

Thème : arithmétique

L'exercice

1. On considère l'équation $(E) : 17x - 24y = 9$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Vérifier que le couple $(9; 6)$ est solution de l'équation (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
2. Le 1er juin 2012, les participants d'un club d'astronomie ont observé le corps céleste $\mathcal{A}$, qui apparaît tous les 51 jours.
   Le 28 juin 2012, ils ont observé le corps céleste $\mathcal{B}$, qui apparaît tous les 72 jours.
   a) À quelle date devront-ils fixer une nouvelle réunion pour observer simultanément les deux corps ?
   b) Un membre du club, qui ne pourra pas être présent à cette date, aura-t-il la possibilité d'observer une nouvelle conjonction des deux corps avant fin 2016 ?

La solution proposée par un élève aux questions 1.b) et 2.a)

1.b) D'après 2.a), on a : $17x - 24y = 17 \times 9 - 24 \times 6$, *soit* $17(x - 9) = 24(y - 6)$.
Ainsi, 17 *divise* $24(y - 6)$, *or* 17 *et* 24 *sont premiers, donc* 17 *divise* $y - 6$, *avec Gauss.*
D'où l'existence d'un entier k *tel que* $y - 6 = 17k$.
On trouve de même l'existence d'un entier k *tel que* $x - 9 = 24k$.
Donc les solutions de E *sont des couples de la forme* $(9 + 24k, 6 + 17k)$, *où* k *est un entier.*

2.a)Le corps céleste $\mathcal{B}$ *est observé* 27 *jours plus tard, d'où* $t = 51x = 72y + 27$ *et* $17x - 24y = 9$.
De plus d'après 1.a), on a $x = 9$ *et* $y = 6$. *Comme le PPCM de* 9 *et* 6 *vaut* 18, *on pourra observer simultanément les deux corps le* 16 *juillet* 2012.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez le raisonnement de l'élève dans chacune de ses réponses.

2- Proposez une correction de la question 2 telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème de l'arithmétique, dont l'un au moins fait appel à la mise en œuvre d'un algorithme.

Thème : optimisation

L'exercice

À partir de l'extrait de manuel donné ci-dessous, un professeur a proposé à ses élèves l'exercice suivant :

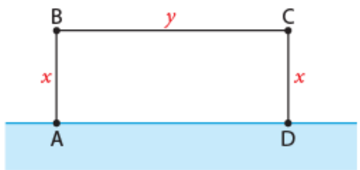
On note f la fonction définie sur $[1;100]$ par $f(x) = 2x + \dfrac{1800}{x}$ et, pour tout réel x de $[1;100]$, on pose : $g(x) = f(x) - f(30)$.

1. Montrer que l'on peut écrire $g(x) = \dfrac{h(x)}{x}$
2. Déterminer une forme développée de $h(x)$.
3. Déterminer alors une forme factorisée de $h(x)$. (On pourra commencer par mettre 2 en facteur dans la forme développée précédente puis on factorisera la partie restante.)
4. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $[1;100]$.
5. Montrer alors que f admet un minimum sur $[1;100]$ dont on donnera la valeur. Préciser aussi pour quelle valeur de x ce minimum est atteint.

Un extrait de manuel

On veut réserver une zone rectangulaire d'aire 1 800 m² pour créer une cressonnière au bord d'une rivière.
On souhaite l'entourer de grillage sauf le long de la rivière.

Problème étudié
Quelles sont les dimensions de la zone qui nécessitent le moins de grillage possible ?



Extrait de math'x seconde

Le travail à exposer devant le jury

1- Comparer les compétences développées par les deux versions de l'exercice (professeur/manuel).

2- Proposez une correction des questions 3 et 5 de l'exercice du professeur telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème optimisation.

Thème : équations différentielles

L'exercice suivant a été donné en section de technicien supérieur (STS).

L'exercice

Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E_1) $y' + y = 0$.
2) Déterminer une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = u(x)\mathrm{e}^{-x}$ soit une solution de (E).
3) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
4) Déterminer la fonction g, solution particulière de (E), vérifiant la condition initiale $g'(0) = 0$.
5) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
6) Déterminer les variations de g.
7) Construire la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormal.

Un extrait des programmes de BTS

Équations différentielles

On s'attachera à relier les exemples étudiés avec les enseignements de physique, mécanique et technologie, en faisant saisir l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale, et en faisant ressortir la signification ou l'importance de certains paramètres ou phénomènes : stabilité, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance,...
a) Résolution des équations linéaires du premier ordre $a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$.
On se placera dans le cas où a, b, c sont des fonctions dérivables à valeurs réelles et on cherchera les solutions sur un intervalle où a ne s'annule pas.
b) Résolution des équations linéaires du second ordre à coefficients réels constants, dont le second membre est une fonction exponentielle-polynôme $t \mapsto \mathrm{e}^{at}P(t)$, où $a \in \mathbb{C}$.

Travaux pratiques

1° Résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre.
2° Résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre.
Pour les TP 1° et 2° :
toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière seront données. [...]

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez dans quelle mesure cet exercice correspond au référentiel du BTS.
2- Proposez une correction des questions 2), 3) et 4) telle que vous la proposeriez à des élèves de BTS.
3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *équations différentielles*, dont l'un au moins au niveau BTS.

Thème : utilisation d'un tableur

L'exercice

Voici un problème proposé par Leonhardt Euler dans son ouvrage *Introduction à l'analyse infinitésimale* (1748, traduction de J-B.Labey,1796).
Un particulier doit 400 000 *florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à* 5 *pour cent ; il acquitte tous les ans* 25 000 *florins ; on demande après combien d'années la dette sera entièrement éteinte.*

Les comptes rendus de trois élèves de lycée

Élève 1

Les intérêts représentent chaque année 20000 florins. Sur les 25000 florins acquittés chaque année, 5000 florins servent au remboursement. 400 000÷5 000=80, la dette sera éteinte au bout de 80 ans.
Vous m'avez demandé si j'étais bien sûr, mais je pense que c'était un piège, je pense que j'ai la bonne réponse.

Élève 2

J'ai utilisé le tableur. En B2, j'ai rentré $\boxed{=400000}$. *En C2, j'ai rentré* $\boxed{=25000}$, *en D2,* $\boxed{=0{,}05*B2}$, *en E2,* $\boxed{=C2\text{-}D2}$ *et en B3,* $\boxed{=B2\text{-}E2}$. *Après j'ai utilisé la poignée de recopie.*
Je m'aperçois qu'au début de la 34° année, la somme restant à payer est négative. Le particulier remboursera donc pendant 33 ans, et il aura un petit bonus la dernière année.

Élève 3

En cherchant avec le tableur, j'ai vu que la somme payée par le particulier qui n'est pas mangée par les intérêts forme une suite géométrique de raison 1,05 !!! J'ai vérifié en faisant le quotient pour les dix premiers termes et en demandant 12 chiffres d'affichage (avec plus, cela aurait marché aussi).
J'ai ensuite utilisé la formule du cours, et ça m'a amené à :

$$5000 \times \frac{1,05^n - 1}{1,05 - 1} = 400\,000$$

et je suis resté bloqué là, même si vous m'avez dit de réfléchir, je n'ai pas trouvé.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions d'élèves au regard des programmes officiels, en mettant notamment en évidence leur capacité à *chercher, expérimenter, modéliser, raisonner* et *démontrer.*

2- Proposez une démonstration aboutie telle que vous la présenteriez devant une classe, dont vous préciserez le niveau.

3- Proposez deux ou trois problèmes où l'utilisation d'un tableur est pertinente.

Thème : probabilités

L'exercice

On lance deux dés équilibrés à 6 faces, l'un est rouge et l'autre est noir. On s'intéresse à la somme des nombres qui apparaissent sur la face du dessus.
Le dé rouge porte sur ses faces les numéros : $1; 1; 2; 3; 4; 4$.
Le dé noir porte sur ses faces les numéros : $2; 2; 3; 4; 5; 5$.

1) Combien y-a-t-il d'issues ? Sont-elles équiprobables ?
2) Obtient-on plus souvent une somme supérieure ou égale à 7 ou bien une somme inférieure ou égale à 7 ?

La solution proposée par trois élèves

Élève 1

1) Il y a 36 issues équiprobables car les deux dés ont 6 faces chacun.
2) "la somme est supérieure à 7" est le contraire de l'événement "la somme est inférieure à 7". Ainsi $p(S < 7) = 1 - p(S > 7)$ *et donc* $p(S < 7) = p(S > 7) = 0,5$.

Elève 2

1)

Dé rouge	1	1	2	3	4	4
Dé noir	2	2	3	4	5	5
Somme	3	3	5	7	9	9

Les sommes probables sont donc $3, 5, 7$ *et* 9.
Il n'y a pas équiprobabilité car 3 *arrive 2 fois et* 5 *une fois.*
2) On obtient plus souvent une somme inférieure ou égale à 7 *(dans 4 cas) qu'une somme supérieure ou égale à* 7 *(dans 3 cas).*

Elève 3

1) Il y a 7 issues probables : $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. *La loi de probabilité est équirépartie car les dés sont équilibrés.*
2) À l'aide d'un arbre, je vois qu'on obtient plus souvent une somme inférieure ou égale à 7 *(dans 28 cas) qu'une somme supérieure ou égale à* 7 *(dans 13 cas).*

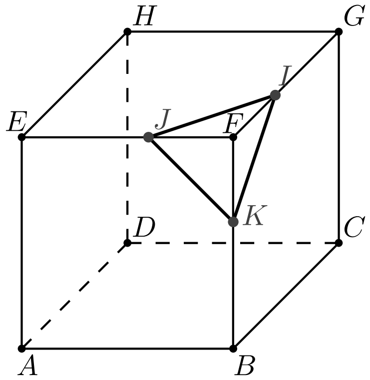
Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les compétences acquises dans le domaine des probabilités et en précisant l'origine de ses éventuelles erreurs.
2- Proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *probabilités*, dont l'un au moins nécessite la mise en œuvre d'une simulation à l'aide d'un tableur.

Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice

Soit $ABCDEFGH$ un cube dont l'arête mesure 1 cm, On place les points I, J et K respectivement sur les arêtes $[FG], [FE]$ et $[FB]$ tels que $FI = FJ = FK = x$ où x est un réel donné strictement positif inférieur à la longueur de l'arête du cube.



1) Quelle est la nature du triangle IJK ?
2) Déterminer en fonction de x le volume du tétraèdre $FIJK$.
3) La perpendiculaire menée par F au plan (IJK) coupe ce plan au point M. La hauteur FM du tétraèdre $IJKF$ est-elle proportionnelle à la mesure de la longueur FI ?

La réponse de trois élèves à la question 3)

Elève 1
La hauteur FM augmente avec le côté FI, donc elle est proportionnelle.

Elève 2
Je pense que le point M se trouve au centre du triangle équilatéral IJK.
Je calcule la longueur FM lorsque $x = 1$. Le triangle GEB est équilatéral de côté $\sqrt{2}$.
$GM = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}$*cm. Le triangle FMG est rectangle en M. On a donc : $FG^2 = FM^2 + GM^2$. J'obtiens* $FM^2 = 1 - \frac{6}{9} = \frac{1}{3}$*. D'où* $FM = \sqrt{\frac{1}{3}}$

Si je prends $x = 0,5$ alors j'obtiens une figure deux fois plus petite et donc $FM = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1}{3}}$ *donc c'est proportionnel.*

Elève 3
J'ai utilisé un logiciel de géométrie. J'ai construit M, le projeté orthogonal de F sur le plan IJK et j'ai fait afficher la longueur FM En faisant varier la longueur FI, j'obtiens le tableau suivant

x	1	0,5	0,8
FM	0,58	0,29	0,46

Ce tableau est un tableau de proportionnalité donc la réponse est oui

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez et commentez les raisonnements des trois élèves.
2- Proposez une correction de la question 3) telle que vous la présenteriez à des élèves de seconde.
3- Présentez deux ou trois problèmes sur le thème *géométrie dans l'espace*.

Thème : suites

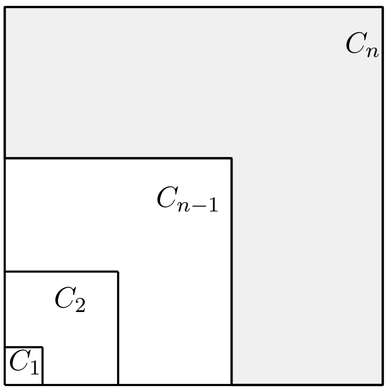
Un professeur envisage de faire calculer à ses élèves la somme des cubes des n premiers entiers naturels non nuls. Il hésite entre les deux exercices suivants.

Le premier exercice

1) On pose pour tout entier naturel n non nul : $S_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$.
   a) Montrer que pour tout nombre entier i compris entre 1 et n : $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$.
   b) Sommer les égalités obtenues, pour i compris entre 1 et n. En déduire que $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2) On note $Z_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$.
   Développer $(i+1)^4 - i^4$. En déduire l'expression de Z_n.

Le deuxième exercice

Pour tout entier naturel non nul n, on note u_n la somme des entiers de 1 à n.
On construit C_1, carré de côté u_1, C_2 carré de côté u_2,..., C_n carré de côté u_n en les emboîtant comme sur la figure ci-dessous.



1) *a) Calculer l'aire des carrés C_1, C_2, C_3.*
   b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'aire de C_n est égale à $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
   c) En déduire que pour pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'aire de la bande grisée délimitée par les carrés C_n et C_{n-1} est égale à n^3.

2) Déterminer une expression simple de la somme des cubes des n premiers entiers.

D'après Hyperbole première S (éditions Nathan)

Le travail à exposer devant le jury

1- Exposez les raisons qui peuvent amener le professeur à choisir l'un ou l'autre des exercices.
2- Démontrez la formule de la somme des cubes, comme vous le feriez devant une classe, en suivant la méthode de votre choix.
3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *suites* dont l'un au moins peut donner lieu à une approche géométrique.

Thème : géométrie plane

L'exercice

Tracer un cercle de centre O, et placer un point A à l'intérieur du disque ainsi défini.
Choisir un point M sur le cercle, et construire le symétrique M' de A par rapport à M.
Recommencer avec d'autres points du cercle.

Que fait M' quand M parcourt le cercle ?
On pourra construire le symétrique de A par rapport à O.

Un extrait du préambule des programmes de collège

> ***1. Divers aspects d'une démarche d'investigation.***
> *Cette démarche s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques). Les investigations réalisées avec l'aide du professeur, l'élaboration de réponses et la recherche d'explications ou de justifications débouchent sur l'acquisition de connaissances, de compétences méthodologiques et sur la mise au point de savoir-faire techniques.[...]*
> *Une séance d'investigation doit être conclue par des activités de synthèse et de structuration organisées par l'enseignant, à partir des travaux effectués par la classe. Celles-ci portent non seulement sur les quelques notions, définitions, résultats et outils de base mis en évidence, que les élèves doivent connaître et peuvent désormais utiliser, mais elles sont aussi l'occasion de dégager et d'expliciter les méthodes que nécessite leur mise en œuvre.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Proposez le scénario d'une séance permettant d'engager les élèves dans une démarche d'investigation prenant appui sur l'exercice.

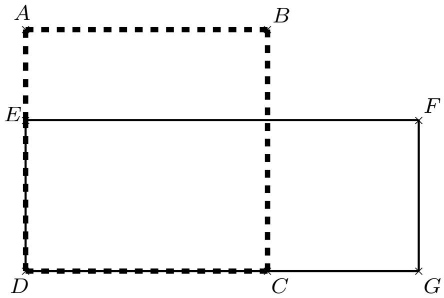
2- Exposez une correction de l'exercice comme vous le feriez devant une classe de collège.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie plane*, dont l'un au moins peut être le support d'une démarche d'investigation.

Thème : problèmes conduisant à la résolution d'équations

L'exercice

Le dessin ci-contre représente une figure composée d'un carré $ABCD$ et d'un rectangle $DEFG$.
E est un point du segment $[AD]$.
C est un point du segment $[DG]$.
Dans cette figure, la longueur AB peut varier mais on a toujours $AE = 15\,cm$ et $CG = 25\,cm$.



1) Dans cette question, on suppose que $AB = 40\,cm$.
   a) Calculer l'aire du carré $ABCD$.
   b) Calculer l'aire du rectangle $DEFG$.
2) Peut-on trouver la longueur AB de sorte que l'aire du carré $ABCD$ soit égale à l'aire du rectangle $DEFG$?
   Si oui, calculer AB. Si non, expliquer pourquoi.
   Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte.

La réponse de trois élèves à la question 2).

Elève 1
J'ai fait un tableau avec plusieurs valeurs, on voit que les deux aires vont être égales à un moment.

AB	*aire du carré* $ABCD$	*aire du rectangle* $DEFG$
40	1600	1625
30	900	825
35	1225	1200

J'ai essayé pile entre 35 *et* 40 *:* $37,5$. *C'est la bonne réponse !*

Elève 2
J'ai appelé I *l'intersection de* (EF) *et* (BC). *Les deux aires sont égales si les rectangles* $ABIE$ *et* $CGFI$ *ont la même aire. Il faut donc que* $15 \times AB = 25 \times GF$. *C'est vrai pour* $AB = 5$ *et* $GF = 3$. *Donc il y a bien une solution.*

Elève 3
Pour que les deux figures aient la même aire, il faut au moins qu'elles soient toutes les deux des carrés, mais ça n'est pas possible. Le problème n'a pas de solution.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez les productions des trois élèves, et indiquez pour chacun comment vous pourriez l'aider à améliorer son raisonnement.

2- Proposez une correction de la question 2) telle que vous la présenteriez à des élèves de collège.

3- Présentez deux ou trois *problèmes pouvant conduire à la résolution d'équations.*

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

Le périmètre d'un triangle isocèle vaut 1.
Rechercher quelles doivent être les dimensions de ce triangle pour que son aire soit la plus grande possible.

La solution proposée par un élève de première

Je résous le problème avec un logiciel de géométrie : je construis la figure avec un curseur a entre 0 *et* 1*, qui représente la longueur des deux côtés égaux, la troisième longueur est alors* $1-2a$
Je ne peux construire ce triangle, à l'aide de cercles, que si a est entre $0,25$ *et* $0,5$.

Je demande l'aire du triangle et en faisant varier la valeur du curseur, j'obtiens une aire maximale de $0,04808$ *si* $a=0,33$*, soit le tiers du périmètre. Il faut donc que le triangle soit équilatéral pour avoir une aire maximale qui est alors égale à* $0,04808$

Le travail à exposer devant le jury

1- Indiquez les aspects positifs de la production de cet élève et précisez l'aide que vous pourriez lui apporter.

2- Proposez une solution de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices donnant lieu à une conjecture suivie d'une démonstration.

Thème : probabilités, échantillonnage

L'exercice

Un laboratoire souhaite déterminer si un objet est radioactif. Pour cela, il utilise un compteur Geiger. Cet appareil compte les coups provoqués par la désintégration de particules. Ces coups peuvent être dus à la radioactivité de l'objet, ou être provoqués par un bruit de fond parasite. Chaque centième de seconde, la probabilité que l'appareil capte un coup dû au bruit de fond est égale à $0,03$.

L'objet a été placé pendant dix secondes dans une pièce isolée et, durant ces dix secondes, le compteur a dénombré 37 coups. On cherche à savoir si ce résultat permet d'affirmer que l'objet est radioactif.

1) a) Simuler à l'aide d'un tableur le nombre de coups provoqués par le bruit de fond pendant une plage de 10 secondes.
   b) Organiser 200 simulations analogues. Un comptage de 37 coups en dix secondes semble-t-il exceptionnel ? Que peut-on conjecturer sur la radioactivité de l'objet ?
2) On fait l'hypothèse, notée (H_0) que l'objet n'est pas radioactif. Soit X la variable aléatoire qui décompte le nombre de coups provoqués par le bruit de fond pendant une plage de 10 secondes.
   a) Préciser la loi de la variable X et donner ses paramètres.
   b) Déterminer le plus petit entier N tel que $P(X \leqslant N) \geqslant 0,95$.
   c) On décide de rejeter l'hypothèse (H_0) si le nombre de coups mesurés par le compteur sur cet objet, placé pendant 10 secondes dans une pièce isolée, est supérieur ou égal à $N+1$. Que peut-on en conclure quant à l'objet pour lequel on a mesuré 37 coups ?

La solution proposée par trois élèves à la question 1.b).

Élève 1

Sur 200 simulations, j'ai obtenu une seule fois 37 coups. C'est très exceptionnel, donc les coups observés sur l'objet prouvent qu'il est radioactif.

Élève 2

En simulant sur le tableur, on a eu 37 coups et même plus pour 19 expériences, ça fait à peu près 10% de toutes les simulations. 10% c'est peu mais ce n'est pas une exception. On ne peut rien dire.

Élève 3

En théorie, on doit obtenir 30 coups. J'ai obtenu un nombre de coups assez loin de 30 plusieurs fois. On ne peut pas savoir si c'est exceptionnel car pour cela il faut connaître l'écart-type. Dans une simulation, on ne peut pas connaître l'écart-type, donc je ne peux pas répondre en étant sûr.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence la pertinence de sa démarche, l'origine de ses éventuelles erreurs de raisonnement et les moyens d'y remédier.

2- Proposez une correction de la question 2 telle que vous l'exposeriez devant une classe.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *probabilités et échantillonnage*, dont l'un au moins nécessite la mise en œuvre d'une simulation.