Dossier du 28 juin 2008

Thème : Équations différentielles

1. L'exercice proposé au candidat

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E)\ y' + \big(1+\tan x\big)y = \cos x \qquad (E_0)\ y' + y = 1.$$

1) Donner l'ensemble des solutions de (E_0).
2) Soient g une fonction dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $f(x) = g(x)\cos x$. Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).
3) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Indiquer, pour chacune des questions de l'exercice, les savoirs mis en jeu.

Q.2) Présenter une solution de la question 2) de l'exercice telle que vous la donneriez à des élèves de Terminale.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) Sa réponse à la question **Q.2)**.

b) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Équations différentielles** ».

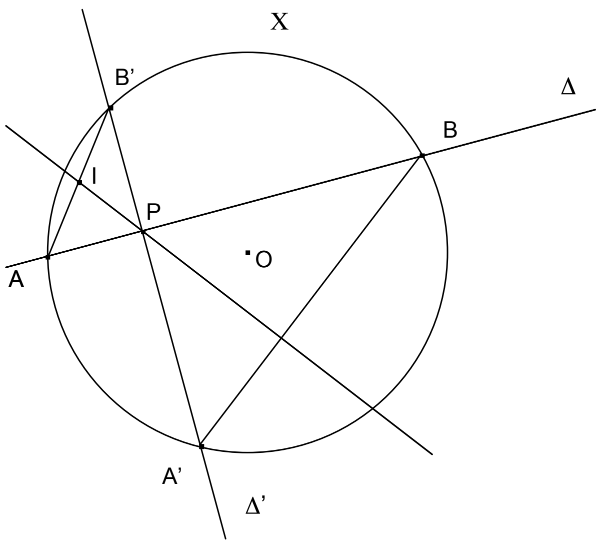
Dossier du 29 juin 2008

Thème : Outils - calcul vectoriel

1. L'exercice proposé au candidat

On considère un cercle X de centre O et de rayon r et un point P du plan. On pose $d = OP$.

1. Une droite Δ passant par P coupe le cercle X en A et B. On note E le point du cercle X diamétralement opposé à A.
   Démontrer que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PE}$. En déduire que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = d^2 - r^2$.
2. Application à l'étude d'une configuration :
   Dans la figure ci-dessous les droites Δ et Δ' sont orthogonales et le point I est le milieu du segment $[AB']$. Démontrer que les droites (PI) et $(A'B)$ sont orthogonales.



2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Indiquer, pour chacune des questions de l'exercice, les savoirs mis en jeu.

Q.2) Rédiger une solution de la question 2 de l'exercice telle que le candidat la présenterait à un élève de Première S.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.2**.
- ◇ Un ou plusieurs exercices sur le thème « **Outils - Calcul vectoriel** ».

Dossier du 30 juin 2008

Thème : Suites
Étude du comportement de suites définies par une relation de récurrence du type : $u_{n+1} = f(u_n)$

1. L'exercice proposé au candidat

1) On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.
   a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) \geqslant x$.
2) On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in [0, 1]$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.

Q.2) Rédiger un énoncé détaillé de la question 2) pour des élèves de Terminale scientifique.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question **Q.2)**.
- Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Suites : Étude du comportement de suites définies par une relation de récurrence du type :** $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

Dossier du 1er juillet 2008

Thème : Arithmétique.

1. L'exercice proposé au candidat

On appelle diviseur propre d'un entier naturel non nul n, tout diviseur de n qui soit positif et distinct de n. Tout entier naturel non nul égal à la somme de ses diviseurs propres est dit nombre parfait. Exemple : 6 est un nombre parfait car il est égal à la somme de ses diviseurs propres soit 1, 2 et 3.

1) Établir la liste des diviseurs de 28 et 496 et montrer que ce sont deux nombres parfaits.
2) Vérifier que 28 et 496 sont de la forme $2^n(2^{n+1}-1)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec $2^{n+1}-1$ premier.
3) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $2^{n+1}-1$ est premier alors $2^n(2^{n+1}-1)$ est parfait.
4) Illustrer par un exemple le fait que si $2^{n+1}-1$ n'est pas premier alors $2^n(2^{n+1}-1)$ n'est pas parfait.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Quels sont les outils nécessaires à la résolution de l'exercice ?

Q.2) Rédiger la réponse à la question 3.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.2)**.
- ◇ Un ou plusieurs exercices sur le thème « **Arithmétique** » mettant en jeu des propriétés de certains nombres entiers.

Dossier du 2 juillet 2008

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en année, d'un téléviseur avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Ainsi la probabilité d'un intervalle $[0,t[$, notée $p([0,t[)$, est la probabilité que le téléviseur tombe en panne avant t année. Cette loi est la loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

1) Déterminer, en fonction de λ, la valeur de t pour laquelle on a $p([0,t[) = p([t,+\infty[)$.
2) D'après l'étude statistique effectuée par le constructeur, la probabilité que le téléviseur tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. Calculer la valeur exacte de λ.
   Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}2$.
3) Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le téléviseur n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est : 0,5488.
4) Sachant que ce téléviseur n'a connu aucune panne au cours des 10 premières années après sa mise en service, quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne au cours des 13 premières années ?
5) Dix téléviseurs neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de téléviseurs qui n'ont pas eu de panne au cours des trois premières années. Calculer une valeur approchée de la probabilité de l'événement « $X = 4$ » arrondie à 10^{-4} près.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Rédiger une réponse pour chacune des questions 3) et 4) de l'exercice.

Q.2) Commenter l'expression « loi de durée de vie sans vieillissement ».

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.1)**.
- ◇ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : **« Probabilités »**.

Dossier du 3 juillet 2008

Thème : Problème de lieu

1. L'exercice proposé au candidat

On considère dans le plan deux droites Δ et Δ' sécantes en O et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ tels que $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. On considère deux points A et B situés respectivement sur Δ et Δ', distincts de O et tels que $OA = OB$. À tout point M du plan on associe la somme notée $s(M)$, des distances du point M aux droites Δ et Δ'.

1) Montrer que $s(A) = s(B) = OA\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2) Soit M un point du segment $[AB]$. En utilisant les aires des triangles OMA et OMB, montrer que la somme $s(M)$ est indépendante de la position de M sur le segment $[A, B]$.
3) Calculer la distance OA afin que, pour tout point M du segment $[AB]$, l'on ait $s(M) = 2$.
4) Le point A étant fixé pour satisfaire la condition de la question précédente, on note $\mathscr{L}$ le lieu des points M du plan tels que $s(M) = 2$. Montrer que $\mathscr{L}$ contient un rectangle dont $[AB]$ est un côté.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoir-faire utilisés dans cet exercice.

Q.2) Présenter une animation sur le module de géométrie dynamique de la calculatrice mettant en évidence le résultat établi dans la question 2) de l'exercice.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question **Q.1)**.
- L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : « **Problème de lieu** ».

Dossier du 4 juillet 2008

Thème : Analyse : Fonctions et équations

1. L'exercice proposé au candidat

Soit k un réel. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{kt^2}\,\mathrm{d}t$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de F et l'on s'intéresse au nombre de points M_0 d'abscisse x_0 appartenant à $\mathcal{C}$ et en lesquels la tangente à $\mathcal{C}$ a un coefficient directeur égal à x_0.

1) Montrer qu'un tel point M_0 existe si et seulement si $x_0 > 0$ et vérifie l'équation

$$(E) : \qquad \ln x = kx^2.$$

2) a) En utilisant une calculatrice graphique et en faisant varier les valeurs de k, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) dans $]0, +\infty[$.

b) Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k pour laquelle l'équation (E) a une unique solution dans $]0, +\infty[$.

3) Démontrer que pour $k < 0$, l'équation (E) a une unique solution dans $]0, +\infty[$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Présenter, à l'aide de la calculatrice, la ou les représentations permettant de faire les conjectures demandées à la question 2).

Q.2) Proposer une solution de la question 3) de l'exercice telle que le candidat la présenterait à des élèves de terminale.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question **Q.2)**.
- L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Fonctions et équations** ».

Dossier du 5 juillet 2008

Thème : Problèmes d'incidence

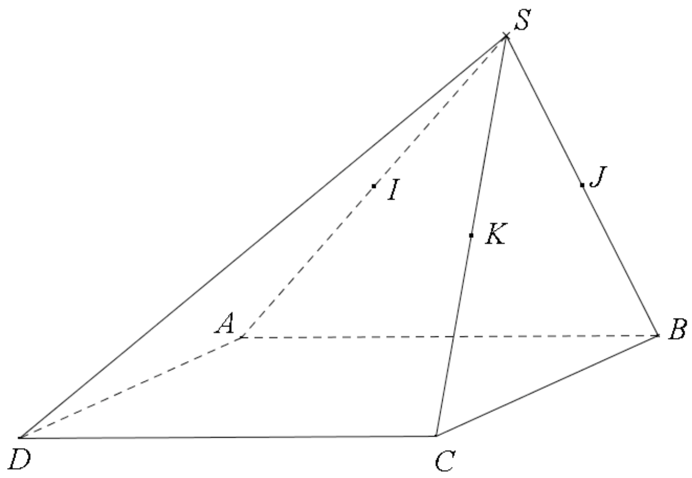
1. L'exercice proposé au candidat

Soit un parallélogramme $ABCD$ situé dans un plan $\mathscr{P}$ et soit S un point de l'espace n'appartenant pas à $\mathscr{P}$. On note respectivement I, J et K les milieux des segments $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.

Q.1) a) Montrer que les plans $\mathscr{P}$ et (IJK) sont parallèles.
b) Montrer que le plan (IJK) coupe $[SD]$ en son milieu.

Q.2) Quelle est l'intersection des plans (CIJ) et $\mathscr{P}$?

Q.3) En déduire l'intersection des plans (CIJ) et (SAD).



2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Énoncer les théorèmes mis en jeu dans l'exercice.

Q.2) Présenter un corrigé de la question 1) pouvant être présenté à une classe de lycée.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) Sa réponse à la question Q.2).

b) Plusieurs énoncés d'exercices, dans la mesure du possible variés par le niveau concerné et la méthode de résolution utilisée, se rapportant au thème : « **Problèmes d'incidence** ».

Dossier du 10 juillet 2008

Thème : Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence...).

1. L'exercice proposé au candidat

Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose détudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ (modulo 2^n).

1) Cas où $n = 2$: Montrer que $1, 3$ et 5 sont solutions du problème.
2) On suppose dorénavant que n est un entier naturel supérieur ou égal à 3. Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1$ (modulo 2^n).
   a) Montrer que les entiers x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
   b) On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. Montrer qu'on a alors $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$ (modulo 4) et en déduire une contradiction.
   c) On suppose que x, y et z sont impairs. Montrer qu'on a $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$ (modulo 8) et conclure.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.

Q.2) Présenter une correction détaillée de la question 2)c) telle que le candidat la proposerait à des élèves de Terminale S.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

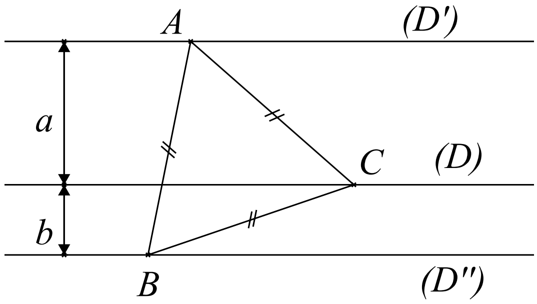
- ⋄ Sa réponse à la question Q.2).
- ⋄ Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence...)** ».

Dossier du 11 juillet 2008

Thème : Problèmes de calcul de grandeurs
Calculs de longueurs, d'aires et de volumes

1. L'exercice proposé au candidat

Dans la figure ci-dessous le triangle ABC est équilatéral et les droites (D), (D') et (D'') sont des droites parallèles passant respectivement par les sommets C, A et B. On note a la distance de (D) à (D') et b celle de (D) à (D'') ; on se propose de calculer, en fonction de a et b, l'aire du triangle ABC.



1 Le cercle circonscrit à ABC recoupe la droite (D) en un point P. Montrer que $AP = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ et que $BP = \dfrac{2b}{\sqrt{3}}$.

2 En déduire que $AB^2 = \dfrac{4(a^2 + b^2 + ab)}{3}$.

3 Calculer l'aire du triangle ABC en fonction de a et b.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2) Proposer la rédaction d'une solution à la question 1).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

◇ Sa réponse à la question **Q.2)**.

◇ Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes de calcul de grandeurs : calculs de longueurs, d'aires et de volumes** ».

Dossier du 12 juillet 2008

Thème : Intégration. Calcul d'intégrales par des méthodes variées

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que F est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

   On considère la fonction u définie sur $[0,+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

2) a) Calculer la dérivée de la fonction $F \circ u$.
   b) En déduire que, pour tout réel $x \in [0,+\infty[$, on a $F \circ u\,(x) = x$.
   c) Calculer $F(2)$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Préciser les théorèmes utilisés dans cet exercice.

Q.2) Proposer une solution de la question 2) telle que le candidat la présenterait à une classe.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.2)**.
- ◇ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices sur le thème « **Calcul d'intégrales par des méthodes variées** ».

Dossier du 13 juillet 2008

Thème : Géométrie
Interprétation géométrique des nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Soit A un point de (Γ) d'affixe a. On note (T_a) la tangente en A à (Γ).
Soit M un point du plan d'affixe z.
   a) Montrer que M appartient à (T_a) si et seulement si $\dfrac{z-a}{a}$ est imaginaire pur.
   b) Déduire que M appartient à (T_a) si et seulement si z vérifie l'égalité : $z\,\overline{a} + \overline{z}\,a = 2$.
2) Soient A d'affixe a et B d'affixe b deux points distincts de (Γ) tels que $a+b \neq 0$.
Montrer que les droites (T_a) et (T_b), tangentes à (Γ) respectivement en A et B, sont sécantes et que leur point d'intersection a pour affixe $\dfrac{2ab}{a+b}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2) Proposer une solution de la question 1) telle que le candidat la présenterait à une classe.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

1) La réponse à la question **Q.2)**.
2) L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Interprétation géométrique des nombres complexes** ».

Dossier du 14 juillet 2008

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

Cet exercice est un QCM. Pour chaque affirmation une seule des réponses A, B ou C est exacte et il s'agit de la trouver.

1) Dans une classe de 31 élèves, 12 élèves jouent au tennis, 8 élèves jouent au football et 5 élèves jouent à la fois au tennis et au football.
On interroge au hasard un élève de cette classe. La probabilité que cet élève ne joue ni au tennis ni au football est :

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{6}{31}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{16}{31}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{11}{31}$

2) Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires. On tire successivement et au hasard deux boules en respectant le protocole suivant : si la première boule tirée est noire alors on la remet dans l'urne avant de tirer la seconde boule. Si la première boule est blanche alors on ne la remet pas dans l'urne avant de tirer la seconde boule.
La probabilité d'obtenir exactement une boule blanche à l'issue des deux tirages est :

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{3}{5}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{27}{50}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{12}{22}$

3) On dispose d'une urne U_1 contenant quatre jetons numérotées 1, 1, 2, 3 et d'une urne U_2 contenant trois jetons numérotées 2, 3, 3. On tire au hasard un jeton dans chaque urne et on appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux jetons, associe la valeur absolue de la différence des numéros portés par les deux jetons. L'espérance mathématique de X est :

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ $\frac{13}{12}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{5}{6}$

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Indiquer pour chacun des items de ce QCM les savoirs mis en jeu pour trouver la réponse exacte.

Q.2) Justifier la réponse à la question 2).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

◇ Sa réponse à la question **Q.2)**.

◇ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : « **Probabilités** ».

Dossier du 15 juillet 2008

Thème : Problèmes sur les configurations

1. L'exercice proposé au candidat

Sur la figure jointe :

- les points A, O_1, O_2 et O_3 sont alignés ;
- les cercles (Γ_1), (Γ_2) et (Γ_3) ont pour centres respectifs O_1, O_2, O_3 et pour rayons respectifs 10, 20 et 59 millimètres ;
- le cercle (Γ_2) est tangent aux cercles (Γ_1) et (Γ_3) ;
- le point A appartient à (Γ_1) ;

1) Construire, sur la figure jointe, à la règle et au compas, une droite (Δ) passant par A et tangente à (Γ_3) (*on laissera visibles les traits de construction*).

2) On appelle H le projeté orthogonal de O_2 sur (Δ). Calculer la distance OH et justifier que (Δ) coupe (Γ_2) en deux points, que l'on notera B et C.

3) Calculer la distance BC.

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Préciser les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

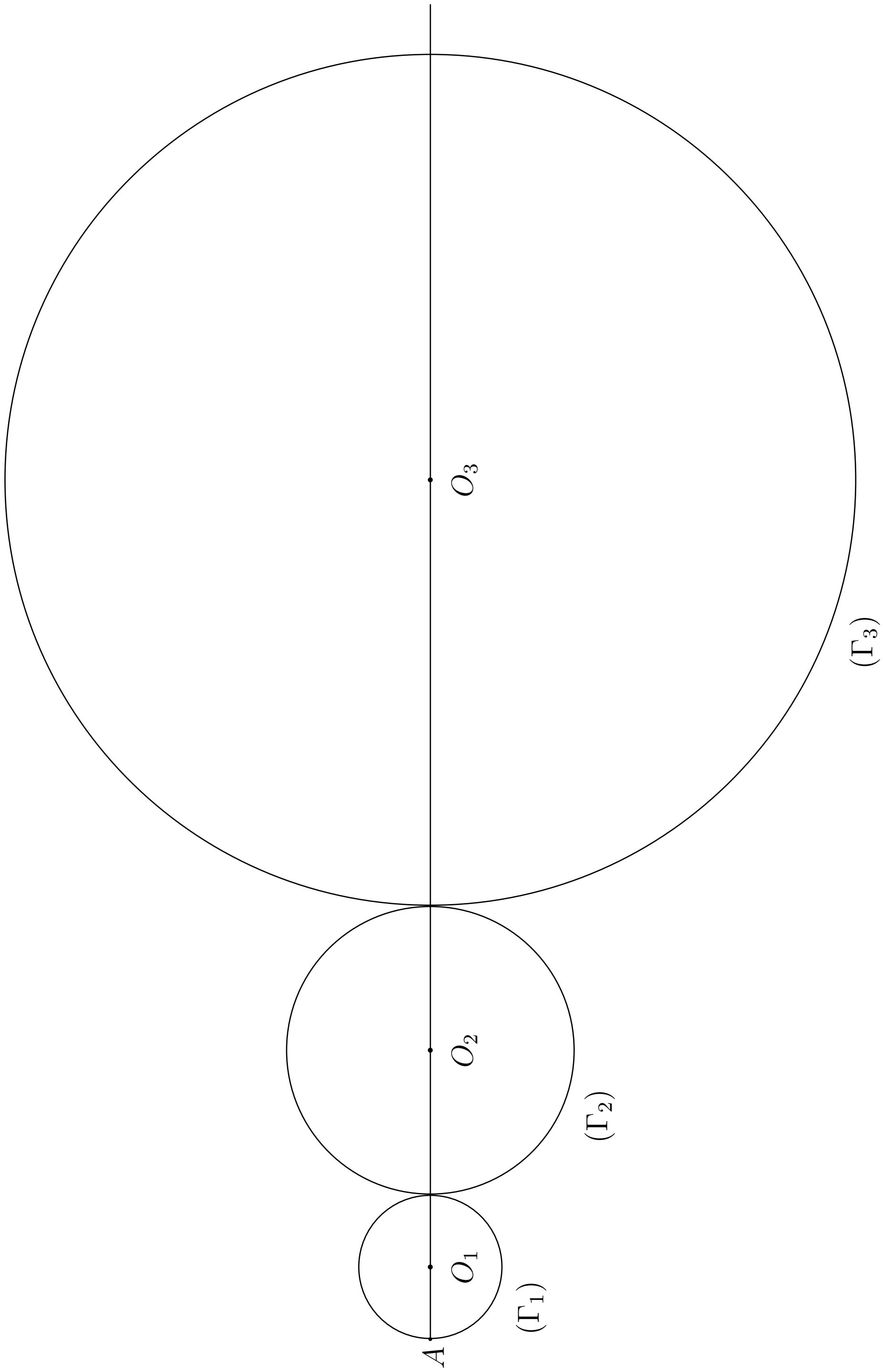
Q.2) Proposer une solution de la question 2) telle que le candidat la présenterait à une classe.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

1) La réponse à la question **Q.2)**.

2) La figure obtenue à la question 1) de l'exercice (à joindre au dossier).

3) L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes sur les configurations** ».



O_3
(Γ_3)
O_2
(Γ_2)
O_1
(Γ_1)
A

Dossier du 16 juillet 2008

Thème : Intégration

1. L'exercice proposé au candidat

L'exercice a pour objet d'étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, \mathrm{d}x.$$

1) Calculer I_1 et montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$I_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$

2) a) À l'aide d'une calculatrice, donner une conjecture sur le sens de variation et la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   b) Démontrer les propriétés conjecturées à la question 2) a).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Indiquer, pour chaque question de l'exercice, les savoirs mis en jeu.

Q.2) Présenter une solution de la question 2).

Sur ses fiches le candidat rédigera et présentera :

a) Sa réponse à la question **Q.2)**.

b) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Intégration** ».

Dossier du 17 juillet 2008

Thème : Géométrie
Problèmes de recherche de lieux géométriques

1. L'exercice proposé au candidat

Soient A, B et C trois points non alignés. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{L}$ des points M du plan tels que les triangles MAB et MAC aient la même aire.

On note (Δ_0) la parallèle à (BC) passant par A et (Δ_1) la médiane issue de A dans ABC.

1) Montrer que l'ensemble $(\Delta_0) \cup (\Delta_1)$ est inclus dans $\mathcal{L}$.

   Pour tout point M distinct de A, on note d_B et d_C les distances respectives de B et C à la droite (AM).

2) Soit M un point n'appartenant pas à (Δ_0). On appelle J l'intersection de la droite (AM) et de la droite (BC).
   a) Montrer que si $M \in \mathcal{L}$ alors $d_B = d_C$.
   b) En déduire que J est le milieu de $[BC]$.
3) Conclure sur l'ensemble $\mathcal{L}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2) Proposer une solution de la question 2) telle que vous la présenteriez à une classe.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) Sa réponse à la question **Q.2)**
b) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes de recherche de lieux géométriques** ».

Dossier du 18 juillet 2008

Thème : Interprétation géométrique des nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat

1) Les nombres complexes a_1, a_2, a_3 et a_4 sont donnés.
Résoudre le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1 + z_2 & = & a_1 \\ z_2 + z_3 & = & a_2 \\ z_3 + z_4 & = & a_3 \\ z_4 + z_1 & = & a_4 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$.

2) Dans le plan, on considère un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$.
Montrer qu'il existe un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ dont les milieux des côtés sont les points A_1, A_2, A_3 et A_4 si et seulement si le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ est un parallélogramme.
Montrer que, dans ce cas, le point de concours des diagonales du parallélogramme $A_1A_2A_3A_4$ est l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3 et M_4.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les diverses étapes de la résolution de la première question de l'exercice.

Q.2) Indiquer les connaissances et savoir-faire mis en jeu dans cet exercice.

Sur ses fiches le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.1)**.
- ◇ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème **« Interprétation géométrique des nombres complexes »**.