Dossier du 29 Juin 2007

Thème : Fonctions
Etude d'encadrement d'une fonction par des fonctions plus simples

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Etudier les variations des fonctions g et h définies sur l'ensemble des réels respectivement par :

$$g(x) = x - \sin(x) \quad \text{et} \quad h(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)$$

2. Déterminer le signe de ces deux fonctions sur $[0;+\infty[$.
3. Prouver que pour tout x réel positif on a : $0 \leqslant x - \sin(x) \leqslant \dfrac{x^3}{6}$
4. Démontrer que pour tout réel x strictement positif on a : $-\dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant 0$.
   Que peut-on en déduire pour f ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1)$ Analyser la méthode utilisée dans cet exercice.

$Q.2)$ Proposer une nouvelle formulation de la première question pour faciliter sa résolution par des élèves de lycée.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

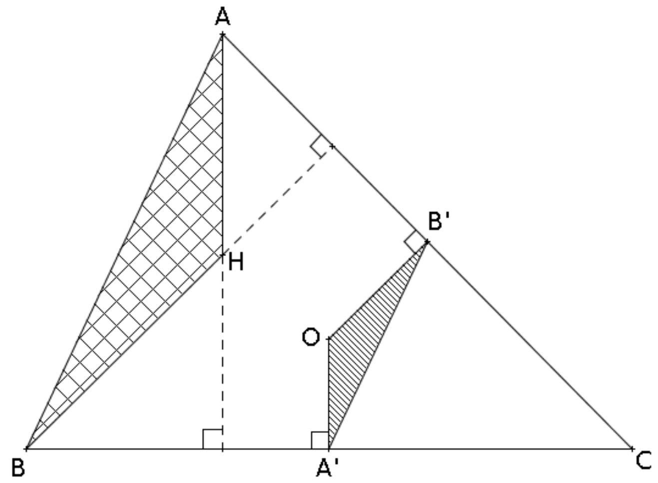
– Sa réponse à la question $Q.2)$
– Un ou plusieurs exercices sur le thème « **Fonctions : Etude d'encadrement d'une fonction par des fonctions plus simples** ».

Dossier du 30 Juin 2007

Thème : Outils
Les triangles isométriques et les triangles de même forme
(triangles semblables)

1. L'exercice proposé au candidat

Soit ABC un triangle quelconque. On note A' et B' les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CA]$, H l'orthocentre de ABC et O le centre du cercle circonscrit à ABC.
Montrer que $AH = 2OA'$ et $BH = 2OB'$.



Une solution de cet exercice a été rédigée de la façon suivante :
« les triangles AHB et $A'OB'$ ont leurs côtés respectifs deux à deux parallèles donc ils sont semblables. Or $\dfrac{AB}{A'B'} = 2$ donc $AH = 2OA'$ et $BH = 2OB'$ »
Justifier cette solution en la détaillant.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu pour compléter la rédaction de l'exercice proposé.

Q.2) Rédiger la justification demandée dans l'exercice.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) sa réponse à la question Q.2)

(ii) un ou plusieurs exercices se rapportant au thème **«Outils : Les triangles isométriques et les triangles de même forme»**.

Dossier du 1 Juillet 2007

Thème : Divers types de raisonnement
(par l'absurde, par récurrence, ...)

1. L'exercice proposé au candidat

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de son premier terme u_0 et de la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 0, \qquad u_{n+1} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u_n\right)$$

1) On suppose que u_0 est un entier, que peut-on dire de la suite (u_n) ?
2) On suppose que u_0 n'est pas entier, montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in]-1, 0[\cup]0, 1[$.
3) On suppose que $u_0 \in]0, 1[$. Existe-t-il un rang à partir duquel la suite est monotone ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Citer différents types de raisonnement intervenant dans votre résolution de l'exercice.
Q.2) Proposer un corrigé de la question 2) pouvant être présenté à une classe de lycée.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– sa réponse à la question Q.2),
– les énoncés d'un ou deux exercices sur le thème « **Divers types de raisonnement (par l'absurde, par récurrence, ...)** ».

Dossier du 2 Juillet 2007

Thème : Probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires.
On tire successivement et au hasard trois boules dans cette urne, en respectant le protocole suivant : on remet la boule dans l'urne si elle est noire, on ne la remet pas si elle est blanche.

Q.1) Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche ?

Q.2) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules blanches ?

Q.3) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Construire un arbre de probabilité permettant de répondre aux questions de l'exercice.

Q.2) Utiliser un tel arbre pour répondre à la question 3 de l'exercice.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

i) Sa réponse à la question Q.1).

ii) L'énoncé d'un ou plusieurs exercice(s) se rapportant au thème : « **Probabilités** ».

Dossier du 3 Juillet 2007

Thème : Calcul d'intégrales par des méthodes variées

1. L'exercice proposé au candidat

L'objectif de cet exercice est de déterminer une primitive de la fonction ln à partir d'un calcul d'aire. On suppose connue la fonction exp et la fonction ln est définie comme réciproque de cette fonction.

1) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle I. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Démontrer que les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
2) Soit x un réel strictement supérieur à 1. En utilisant les courbes représentatives des fonctions ln et exp, calculer $\displaystyle\int_1^x \ln t \,\mathrm{d}t$. En déduire une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1)$ énoncer les propriétés utilisées pour résoudre cet exercice ;

$Q.2)$ rédiger pour des élèves de terminale S un corrigé de la question 2).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) sa réponse à la question $Q.2)$;

b) d'autres exercices sur le thème « **Calcul d'intégrales par des méthodes variées** ».

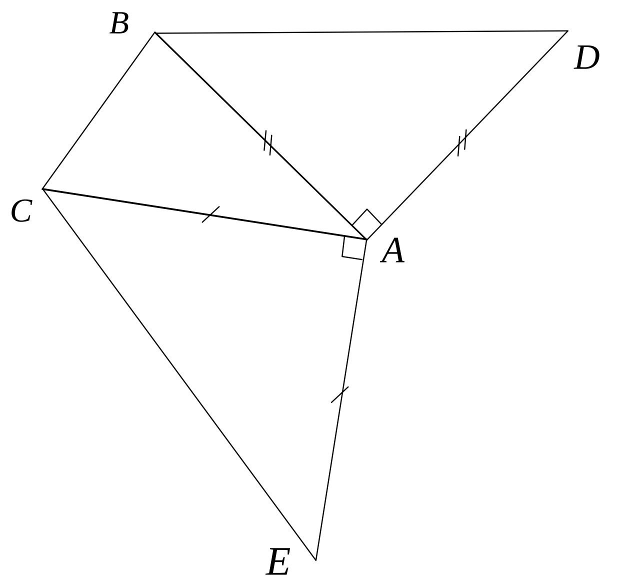
Dossier du 4 Juillet 2007

Thème : Outils
Les transformations

1. L'exercice proposé au candidat

1. L'exercice proposé au candidat

Le plan est orienté. Soient A, B et C trois points non alignés tels que ABC est un triangle direct. On désigne respectivement par D et E les points tels que les triangles ACE et ADB sont directs, rectangles et isocèles en A. Le point O est le milieu de $[BC]$.



Construire le point F, symétrique du point C par rapport à A.

En utilisant une rotation de centre A et une homothétie de centre C, montrer que les droites (AO) et (DE) sont perpendiculaires et que $DE = 2AO$.

2. Le travail demandé au candidat

> En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
> Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :

Q.1) dégager les méthodes et savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice ;

Q.2) présenter une construction de la figure sur la calculatrice, puis une animation permettant d'observer la propriété établie dans l'exercice.

Sur ces fiches, le candidat rédigera et présentera :

i) sa réponse à la question $Q.1)$;

ii) deux exercices sur le thème : **« Outils : les transformations ».**

Dossier du 5 Juillet 2007

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

On se propose d'étudier l'existence des solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ de l'équation $(E) : x^2 - y^2 = n$, où n est un entier naturel non nul.

1) a) Montrer que (E) admet au moins une solution si et seulement s'il existe deux entiers naturels p et q de même parité tels que $n = pq$ (on pourra utiliser l'identité $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$).

   b) En déduire que si n est un entier impair, (E) admet au moins une solution.

2) Montrer que n est un nombre premier impair si et seulement si le couple $\left(\dfrac{n+1}{2}, \dfrac{n-1}{2}\right)$ est l'unique solution de (E).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les outils nécessaires à la résolution de cet exercice.

$Q.2$) Quels aménagements apporteriez-vous à l'énoncé pour l'utiliser dans une classe de terminale scientifique ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.2$).

– L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Arithmétique** ».

Dossier du 6 Juillet 2007

Thème : Techniques de dénombrement

1. L'exercice proposé au candidat

On se donne un entier n strictement positif.

Dans le plan rapporté à un repère d'origine O, on considère l'ensemble des points $M(x, y)$ avec x, y dans $\mathbb{N}$.

Un pion est initialement placé en O. On effectue de façon aléatoire n déplacements de ce pion selon deux directions possibles, qui sont équiprobables :

– vers le haut, en passant du point de coordonnées (x, y) à celui de coordonnées $(x, y+1)$;

– vers la droite, en passant du point de coordonnées (x, y) à celui de coordonnées $(x+1, y)$.

1) Quel est le nombre de trajectoires possibles ? Décrire l'ensemble A_n des points que peut atteindre le pion à l'issue des n déplacements.

2) Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ et soit M le point de A_n d'abscisse k.
   a) Montrer que la probabilité pour que le pion arrive en M au bout de n déplacements est $\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$ où $\binom{n}{k}$ est le k-ième coefficient binomial d'ordre n.
   b) Sachant qu'à l'issue des n déplacements, le pion est en M, quelle est la probabilité que le premier déplacement du pion ait été vers la droite ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

$Q.2$) Rédiger la correction de la question 2)a) de l'exercice, telle que vous la proposeriez à des élèves.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.2$).

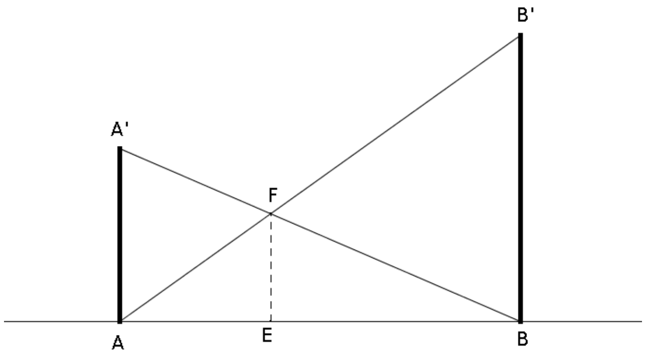
– Deux exercices sur thème « **Techniques de dénombrement** ».

Dossier du 7 Juillet 2007

Thème : Problèmes de calculs de grandeurs
Calculs de longueurs, d'aires et de volumes

1. L'exercice proposé au candidat

Pour condamner une partie de chantier, des ouvriers plantent verticalement deux poteaux, matérialisés par les segments $[AA']$ et $[BB']$, qu'ils relient par des bandes plastiques, matérialisées par les segments $[AB']$ et $[A'B]$.



La distance EF du point d'intersection des deux bandes au sol leur paraît insuffisante. L'un des ouvriers prétend qu'il suffit de rapprocher les deux poteaux pour augmenter cette hauteur, un autre ouvrier lui répond qu'avec les poteaux dont ils disposent, il est impossible d'augmenter cette hauteur.

Qui a raison ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) À l'aide du module de géométrie de la calculatrice, proposer une figure dynamique permettant de conjecturer la réponse à donner à la question posée.

Q.2) Proposer quelques questions intermédiaires qui permettraient à un élève de Collège ou de Seconde de répondre au problème.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) sa réponse à la question Q.2) ;

(ii) un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Problèmes de calcul de grandeurs : calculs de longueurs, d'aires et de volumes** ».

Dossier du 11 Juillet 2007

Thème : Fonctions

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{4 + \sqrt{16x^2 - 8x^3 + x^4}}$$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que les restrictions de f à chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[4; +\infty[$ sont des fonctions affines.
3) Montrer que sur $[0; 4]$ la représentation graphique de f est un arc de cercle qu'on caractérisera.
4) Tracer (C_f).
5) Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2) Montrer que la courbe (C_f) possède un axe de symétrie.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) Sa réponse à la question Q.2).

(ii) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Fonctions** ».

Dossier du 12 Juillet 2007

Thème : Outils — les transformations

1. L'exercice proposé au candidat

Paul trouve un parchemin dans une bouteille jetée à la mer. Voici ce qui est écrit :

> *« Rends-toi sur l'île du pendu, tu y trouveras une potence.*
>
> *À partir de la potence, dirige-toi vers l'unique chêne de l'île en comptant tes pas. Au chêne, pivote d'un quart de tour vers ta droite et marche le même nombre de pas. Plante un piquet en terre.*
>
> *À partir de la potence, dirige-toi ensuite vers la vieille barque éventrée en comptant tes pas. Arrivé à la barque, pivote d'un quart de tour vers ta gauche et marche le même nombre de pas. Plante à nouveau un piquet en terre.*
>
> *Creuse à mi-chemin entre les deux piquets : le trésor est là. »*

Paul se rend sur l'île du pendu, y trouve le chêne et la vieille barque éventrée, mais, à son grand désespoir, il n'y a plus aucune trace de la potence.
Il part de l'endroit où il se trouve et suit à la lettre les consignes précédentes et trouve le trésor.
A-t-il réellement eu de la chance ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1)$ Construire une figure à l'aide du module de géométrie dynamique de la calculatrice et l'animer en déplaçant le point correspondant à la potence pour conjecturer le résultat.

$Q.2)$ Rédiger un énoncé permettant à des élèves de terminale S de localiser le trésor à l'aide d'outils appropriés (isométries du plan ou nombres complexes ou ...).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) Sa réponse à la question $Q.2)$;

b) l'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : « **Outils — les transformations** ».

Dossier du 13 Juillet 2007

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des entiers compris entre 0 et 25 inclus. Dans cet exercice, chaque lettre de l'alphabet correspond à un élément de $\mathcal{E}$ à l'aide du tableau suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On appelle codage l'application qui associe à chaque lettre de l'alphabet l'entier correspondant, et décodage l'application qui associe à chaque entier de $\mathcal{E}$ la lettre correspondante.
Soient a et b deux entiers. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie par :

Pour tout x appartenant à $\mathcal{E}$, $f(x)$ est le reste de la division euclidienne de $ax+b$ par 26.

On appelle cryptage affine de clé (a, b) l'application qui associe à chaque lettre de l'alphabet une lettre de l'alphabet de la façon suivante : on code la lettre par un entier x de $\mathcal{E}$, on calcule $f(x)$ puis on décode $f(x)$.

Pour crypter un mot, on crypte chaque lettre.

1) On suppose dans cette question a premier avec 26. Soient x et x' deux éléments de $\mathcal{E}$, montrer que si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$.
2) On suppose dans cette question que $PGCD(a, 26) \neq 1$. Montrer qu'il existe alors au moins deux lettres différentes ayant le même cryptage.
3) On suppose maintenant que $(a, b) = (7, 2)$.
   a) Quel est le cryptage du mot **JOUR** ?
   b) Quel est le mot dont le cryptage est **QCDEY** ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.

Q.2) Rédiger un corrigé de la question 1) pouvant être proposé à une classe de lycée. Dégager, dans le contexte de l'exercice, l'intérêt de cette question.

Q.3) Utiliser la calculatrice pour proposer, dans une classe, une résolution de la question 3).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) Sa réponse à la questions Q.2).

(ii) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème «**Arithmétique** ».

Dossier du 14 Juillet 2007

Thème : Probabilités, Variables aléatoires

1. L'exercice proposé au candidat

Une urne U_1 contient deux jetons numérotés 1 et 2. Une urne U_2 contient quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.

1) On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne (les choix sont supposés équiprobables).
   a) Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?
   b) On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?
2) On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les six jetons précédents. On tire simultanément et au hasard deux jetons de cette urne. Les tirages sont équiprobables.
   a) Calculer la probabilité de tirer deux jetons portant des numéros identiques.
   b) Soit S la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros des deux jetons tirés. Prouver que la probabilité de l'événement $(S = 4)$ est $\dfrac{1}{5}$.
   c) Déterminer la loi de probabilité de S, et calculer l'espérance de S.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Réaliser un arbre de probabilités pouvant servir de support à la résolution de la question 1). Donner des explications, accessibles à des élèves, sur cette construction.

Q.2) Préciser les diverses notions utilisées dans l'exercice.

Q.3) Indiquer comment on pourrait réaliser, à l'aide d'un tableur, une simulation du tirage décrit dans la question 1) de l'exercice.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

i) Sa réponse à la question Q.1).

ii) Deux exercices sur le thème : « **Probabilités, Variables aléatoires** ».

Dossier du 15 Juillet 2007

Thème : Suites

1. L'exercice proposé au candidat

Soit (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_{n+1} &= \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{2^n} \\ x_0 &= 1 \end{cases}$

1) Déterminer x_1, x_2, x_3 et x_4, en laissant les résultats sous forme fractionnaire.
2) Montrer que la suite (x_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.
3) Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.
4) Conjecturer l'expression générale de x_n en fonction de n et démontrer cette égalité.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Quels sont les théorèmes mis en œuvre dans votre résolution de l'exercice.

$Q.2$) Proposer une étude de la suite (x_n) en introduisant la suite auxiliaire (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 2^n \cdot x_n$.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– L'énoncé d'un exercice établissant les propriétés de la suite (x_n) à l'aide de la méthode de la question $Q.2$).
– Les énoncés de deux exercices sur le thème « **Suites** ».

Dossier du 16 Juillet 2007

Thème : problèmes de construction

1. L'exercice proposé au candidat

On considère trois points non alignés A, B, C. Pour tout point M de la droite (BC) on définit les droites $\Delta_1(M), \Delta_2(M), \Delta_3(M)$ et les points M_1, M_2, M_3 et $I(M)$ de la manière suivante :

$\Delta_1(M)$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par M ; M_1 est le projeté orthogonal de M sur (AB).
$\Delta_2(M)$ est la droite perpendiculaire à (AC) passant par M_1 ; M_2 est le projeté orthogonal de M_1 sur (AC).
$\Delta_3(M)$ est la droite perpendiculaire à (BC) passant par M_2 ; M_3 est le projeté orthogonal de M_2 sur (BC).
$I(M)$ est le point d'intersection de $\Delta_1(M)$ et de $\Delta_3(M)$.

Le but de l'exercice est de construire l'ensemble E des points M de (BC) tels que $M_3 = M$.

1) Réaliser une figure à l'aide du module de géométrie de votre calculatrice et l'animer de manière à conjecturer la nature de l'ensemble E.
2) On suppose dans cette question que le triangle ABC est rectangle. Montrer que la position de M_3 est indépendante de M et conclure sur l'ensemble E.
3) On suppose dans cette question que le triangle ABC n'est pas rectangle.
   a) Soient deux points distincts M et N de (BC). Montrer que $I(M)$ est l'image de $I(N)$ par une homothétie de centre A. En déduire que, quand M décrit la droite (BC), le point $I(M)$ est sur une droite fixe Δ passant par A.
   b) Montrer que le point J intersection de Δ et (BC) est un élément de E.
   c) Construire l'ensemble E.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2) Présenter la construction demandée à la question 1) sur l'écran graphique de la calculatrice à l'aide du module de géométrie.

Q.3) Proposer un énoncé plus détaillé de la question 3) (a), permettant sa résolution au niveau d'une classe de première scientifique.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

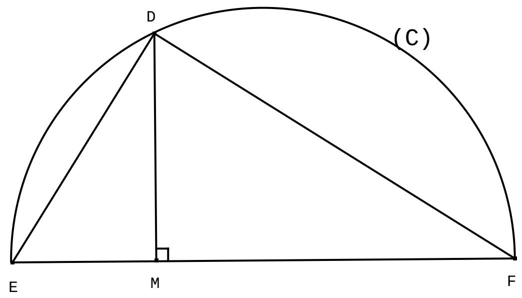
a) sa réponse à la question $Q.1)$;
b) l'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème : **« Problèmes de construction ».**

Dossier du 17 Juillet 2007

Thème : Outils
Les triangles isométriques et les triangles de même forme

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la figure suivante :



où D est un point de (C) demi-cercle de diamètre $[EF]$ et où (DM) est perpendiculaire à (EF). On pose $EM = a$ et $FM = b$.

a) Montrer que les triangles EMD et DMF sont semblables.

b) En déduire l'expression de DM en fonction de a et b.

c) a) Sur la figure jointe, on a construit dans un repère orthonormal, les points $E(-1, 0)$ et $F(x, 0)$ $(x \geqslant 0)$. Quelles sont, en fonction de x, les coordonnées du point A ? En déduire une construction point par point de la courbe représentative (Γ) d'une fonction usuelle.

   b) Construire sur la figure jointe quelques points de (Γ)

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Énoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.

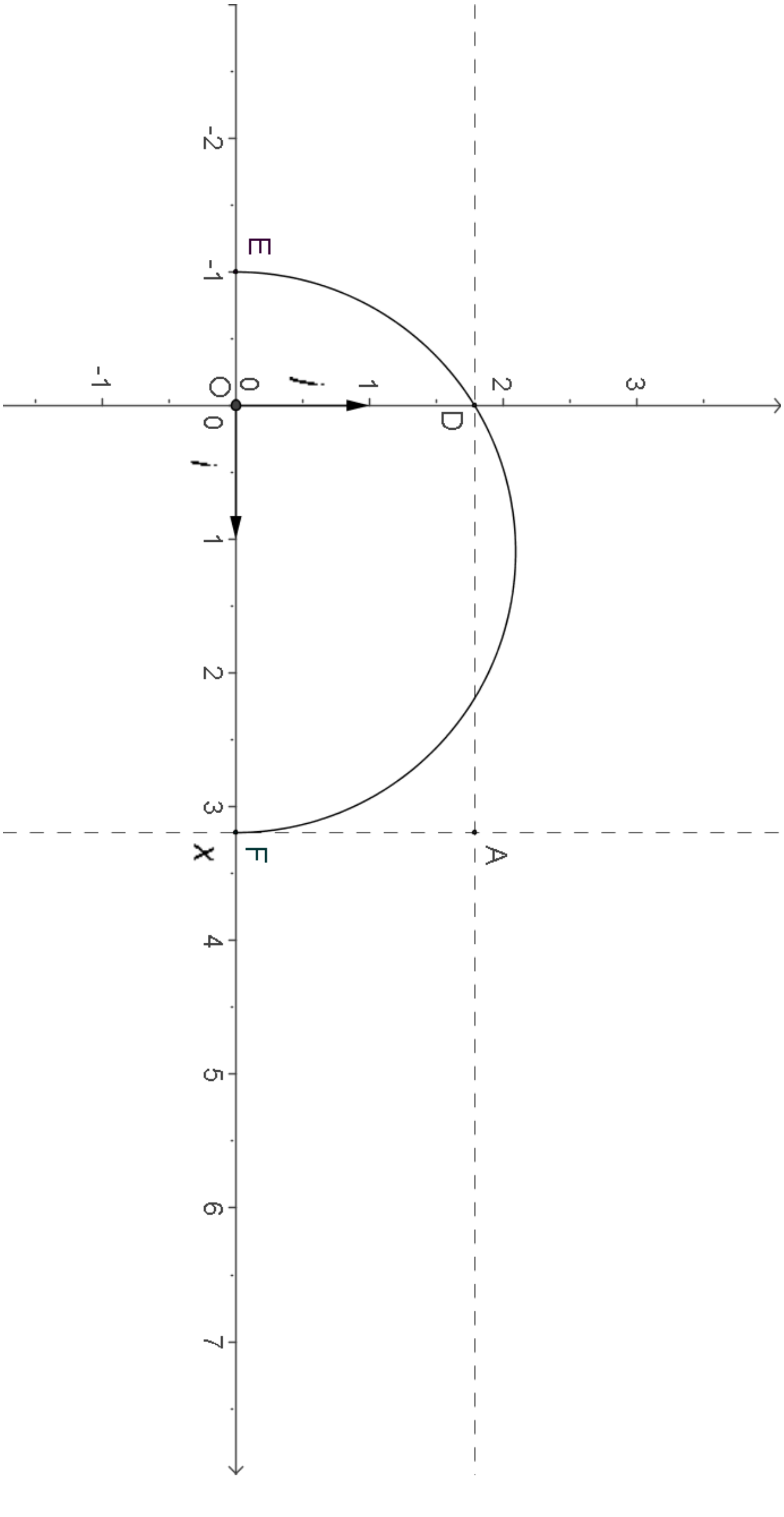
Q.2) Compléter la figure jointe comme demandé dans l'exercice

Q.3) Quelle autre méthode peut permettre d'obtenir l'expression de DM en fonction de a et b ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) sa réponse aux questions Q.1) et Q.2)

(ii) un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Outils : Les triangles isométriques et les triangles de même forme** ».


E
O
D
A
F
x

Dossier du 18 Juillet 2007

Thème : Approximation d'un nombre réel à l'aide de suites.

1. L'exercice proposé au candidat

On se propose de donner un sens à l'écriture du nombre $A = 38{,}63636363\ldots$, puis, à l'aide d'un tableur, de retrouver le développement décimal d'un rationnel.

On considère, pour $n \geqslant 1$, la suite numérique de terme général $u_n = 38{,}63\,63\ldots63$ (avec n périodes dans la partie décimale) et on pose $u_0 = 38$.

a) En écrivant u_n sous la forme $u_n = 38+63\cdot10^{-2}+63\cdot10^{-4}+\cdots+63\cdot10^{-2n}$, démontrer que cette suite est convergente, déterminer sa limite et l'écrire sous forme de fraction irréductible.

   Quel sens peut-on donner à l'écriture du nombre $A = 38{,}63636363\ldots$?

b) Présenter un algorithme simple permettant de retrouver, à l'aide d'un tableur, l'écriture décimale illimitée du nombre rationnel précédent.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Préciser les propriétés utilisées dans la résolution de la première question de cet exercice.

$Q.2$) Écrire l'algorithme demandé à la question 2).

$Q.3$) Montrer que toute écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang représente un nombre rationnel.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

i) Sa réponse à la question $Q.2$).

ii) Des exercices sur le thème « **Approximation d'un nombre réel à l'aide de suites** ».

Dossier du 19 Juillet 2007

Thème : Séries statistiques à deux variables.

1. L'exercice proposé au candidat

Cet exercice provient d'un ouvrage scolaire de terminale.

Le tableau suivant donne, pour douze mois consécutifs, l'évolution des dépenses publicitaires (en milliers d'euros) d'une société commerciale.

Numéro du mois : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Montant des dépenses : y_i	3 000	4 500	3 750	5 250	5 250	6 000	7 500	7 500	8 250	9 750	9 750	10 5

1) Représenter dans un repère orthogonal le nuage des points M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$ correspondant à cette série statistique.
2) Tracer la droite passant par les points $A(1; 3\ 000)$ et $B(9; 8\ 250)$. Déterminer l'équation réduite de cette droite.
3) On utilise cette droite pour réaliser un ajustement affine du nuage des points M_i.
   a) Estimer le montant des dépenses durant le quatorzième mois.
   b) Estimer le rang du mois au cours duquel le montant dépassera pour la première fois 13 000 euros.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1)$ En utilisant l'ajustement affine donné par la méthode des moindres carrés et la calculatrice, répondre aux questions 3)a) et 3)b).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Un ou plusieurs exercices sur le thème : « **Séries statistiques à deux variables** ».

Dossier du 20 Juillet 2007

Thème : Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence...).

1. L'exercice proposé au candidat

Le but de cet exercice est la recherche de tous les entiers naturels n vérifiant la relation

$$(F_n) : \quad n^2 \leqslant 2^n.$$

Pour tout entier naturel n, on note (P_n) la relation $n < 2^{n-1}$.

1) a) Déterminer si (F_n) est vraie ou fausse pour $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
   b) Déterminer si (P_n) est vraie ou fausse pour $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
2) Soit n un entier naturel, montrer que si (F_n) et (P_n) sont vraies alors (F_{n+1}) est vraie.
3) Montrer par récurrence sur n que (P_n) est vraie pour $n \geqslant 3$.
4) Démontrer que (F_n) est vraie pour $n > 3$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :

Q.1) Dégager les méthodes utilisées dans cet exercice.

Q.2) Proposer un autre énoncé permettant d'établir le résultat de la question 4) sans utiliser la propriété (P_n).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question Q.2).
- Des exercices sur le thème « **Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence...)** ».

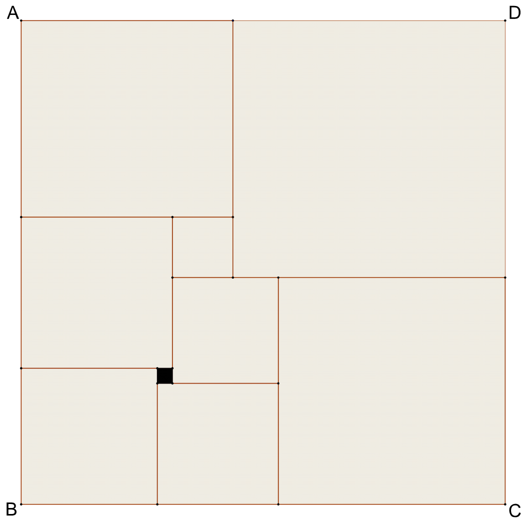
Dossier du 21 Juillet 2007

Thème : Équations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue ou pouvant s'y ramener

1. L'exercice proposé au candidat

Le rectangle $ABCD$ ci-dessous a été découpé en carrés. Calculer ses dimensions sachant que le plus petit des carrés, en noir sur le dessin, mesure 2 cm de côté (*on pourra exprimer les côtés des carrés constituant le rectangle $ABCD$ à l'aide du côté du carré ayant B pour sommet*).

Cette figure, reproduite en plus grande taille à la page 4 de ce dossier, sera également disponible sur un transparent auprès du jury.



2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les diverses étapes de la résolution de cet exercice.

$Q.2$) Indiquer les connaissances et savoir-faire mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

i) Sa réponse à la question $Q.2$).

ii) L'énoncé d'exercices se rapportant au thème : « **Équations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue ou pouvant s'y ramener** ».