Sujet du 29 Juin

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

1) Soit m un entier relatif. On note (E_m) l'équation $11x + 13y = m$, d'inconnue (x, y). Trouver toutes les solutions (x, y) de (E_m) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2) On suppose désormais que m est un entier naturel. Montrer qu'il y a autant de solutions (x, y) de l'équation (E_m) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qu'il y a d'entiers dans le segment $\left[\frac{5m}{11}, \frac{6m}{13}\right]$.
3) Montrer que si $m < 143$ (resp. $m \geqslant 143$), alors l'équation (E_m) possède au plus (resp. au moins) une solution (x, y) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.

Q.2) Ecrire un algorithme renvoyant, pour un entier naturel m donné, la ou les solutions éventuelles (x, y) de l'équation (E_m) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Cet algorithme pourra être implanté sur votre calculatrice ou simplement décrit au tableau dans un langage de votre choix.

Q.3) Comment pourrait-on montrer que 119 est le plus grand entier naturel m tel que (E_m) n'ait pas de solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question Q.2).

– Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème **« Arithmétique »**.

Sujet du 30 Juin

Thème : Séries statistiques à une variable

1. L'exercice proposé au candidat

Le tableau ci-contre indique, pour chaque mois de l'année 2004, trois données concernant le site web du CAPES (la « bande passante » représente le volume d'information qui a été chargé).

Mois	Visiteurs différents	Visites	Bande passante
Janvier 2004	353	425	62 Mo
Février 2004	577	744	144 Mo
Mars 2004	834	1 151	169 Mo
Avril 2004	650	803	132 Mo
Mai 2004	2 498	3 404	1 021 Mo
Juin 2004	2 324	3 254	907 Mo
Juillet 2004	2 636	3 482	589 Mo
Août 2004	1 410	1 916	274 Mo
Septembre 2004	2 525	3 553	681 Mo
Octobre 2004	2 897	4 135	2 600 Mo
Novembre 2004	3 861	5 232	4 372 Mo
Décembre 2004	2 452	3 157	2 499 Mo

a Donner pour ces trois séries de données le tableau des effectifs cumulés croissants. À quels types de questions ces tableaux permettent-ils de répondre ?

b Calculer la moyenne du nombre des visiteurs et la moyenne du nombre des visites. On s'intéresse au nombre moyen de visites par visiteurs : un élève propose de le calculer chaque mois et de faire la moyenne des résultats obtenus. Un autre propose de faire le quotient moyenne des visites moyenne des visiteurs. Obtient-on le même résultat ? Pourquoi ? En moyenne quelle est la bande passante utilisée par un visiteur ?

c Proposer une ou deux représentations graphiques permettant de visualiser les données du tableau.

2. Le travail demandé au candidat

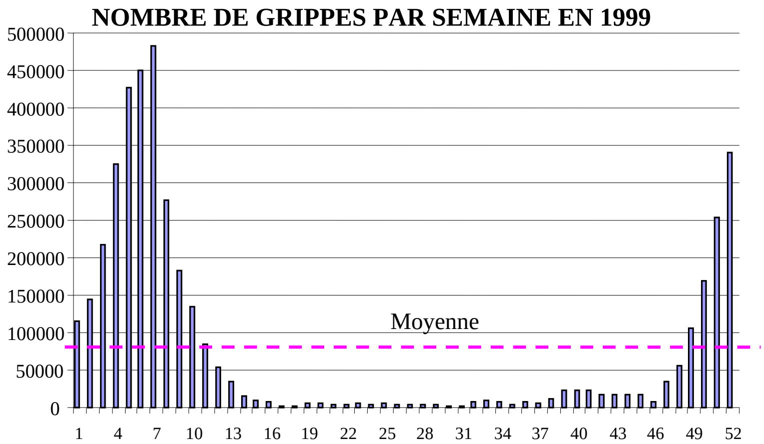
En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1. Préciser à quel niveau d'enseignement une telle activité peut trouver sa place. Indiquer comment vous la mettriez en œuvre dans une classe.

Q.2. Quelles représentations graphiques peut-on obtenir en réponse à la question 3) ? Montrer sur un écran de calculatrice une de ces représentations.

Q.3. Donner au moins un autre exemple permettant d'illustrer l'intérêt et les limites de la notion de moyenne, vous pourrez (sans que ce soit une obligation) utiliser le graphique ci-contre. Énoncer les théorèmes mis en jeu dans l'exercice.



Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– sa réponse à la question Q.3.
– un ou plusieurs exercices sur le thème : **« Séries statistiques à une variable. »**

Sujet du 1 Juillet

Thème : Les suites

1. L'exercice proposé au candidat

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = a \in \mathbb{R} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} - (\alpha - 1)\, u_n \end{cases}$$

1) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
En déduire v_n en fonction de α, n, et a.
2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+1} - (\alpha - 1)\, u_n$. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
3) Calculer u_n en fonction de v_n et w_n puis u_n en fonction de α, n et a.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1)$ Proposer une utilisation de la calculatrice pour le calcul des premiers termes des trois suites rencontrées.

$Q.2)$ Comment choisiriez-vous les suites auxiliaires $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie avec une relation de récurrence de la forme : $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$?

$Q.3)$ Le paramètre α prend des valeurs dans $\mathbb{R}$ privé de 2, pourquoi ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) sa réponse à la question $Q.2)$

(ii) Deux exercices sur le thème des suites, mettant en jeu d'autres notions sur les suites.

Sujet du 2 Juillet

Thème : Outils
Les nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat

On se donne un rectangle $ABCD$ (direct) et on pose $AB = CD = a$, $AD = BC = b$ ($a > 0$, $b > 0$).
On se pose le problème suivant (cf fig.1) : existe-t-il un triangle équilatéral APQ inscrit dans le rectangle $ABCD$ (le point P appartenant au segment $[BC]$ et le point Q au segment $[CD]$) ?

1) Soit P un point quelconque de $[BC]$ et Q un point quelconque du segment $[CD]$. On pose $DQ = x$ et $BP = y$. Montrer que APQ est équilatéral si et seulement si
$$\begin{cases} x = 2a - b\sqrt{3} \\ y = 2b - a\sqrt{3} \end{cases}$$
Indication : utiliser les affixes, et une rotation de centre A.

2) En déduire que le problème a une solution si et seulement si $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et qu'alors elle est unique.

3) On suppose que le problème posé admet une solution. On construit les triangles équilatéraux BCI et CDJ, comme indiqué figure 2. Soit P le point d'intersection des droites (AJ) et (BC), et Q le point d'intersection des droites (AI) et (CD). Montrer que APQ est le triangle équilatéral cherché.
En déduire une construction du triangle APQ à la règle et au compas.

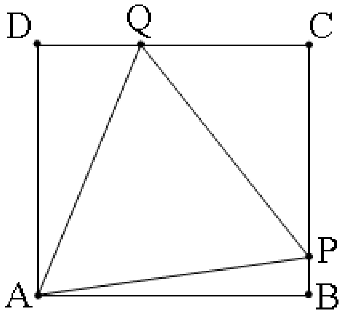


fig.1

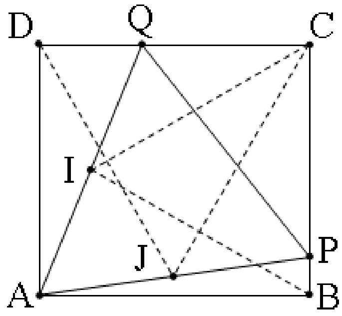


fig.2

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$ Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.

$Q.2$ En utilisant l'environnement de géométrie dynamique de la calculatrice, construire le rectangle $ABCD$ et le triangle équilatéral APQ (quand il existe). Animer la figure de façon à voir les conditions limites entre lesquelles le problème posé admet une solution.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.1$).

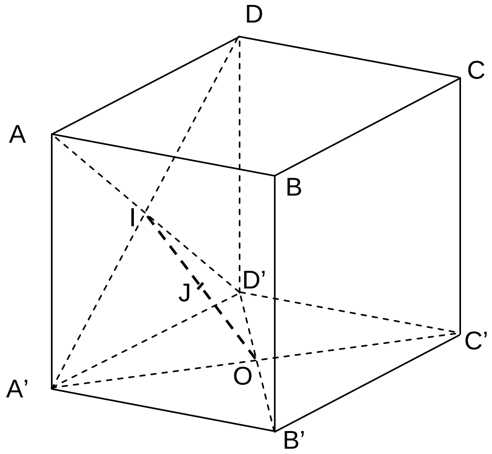
– Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème **« Géométrie : nombres complexes »**.

Sujet du 3 Juillet

Thème : Problèmes de calculs de grandeurs
Calculs de longueurs, d'aires et de volumes

1. L'exercice proposé au candidat

$ABCDA'B'C'D'$ est un cube de côté 4 cm, I et O sont les centres respectifs des carrés $ADD'A'$ et $A'B'C'D'$.



1) Construire le triangle $A'C'D$ en vraie grandeur.
2) a) Montrer que OCC' est rectangle en C'.
   b) Calculer OC.
3) Calculer IC.
4) Soit J le milieu de $[OI]$. Calculer CJ puis $A'J$ puis $A'C$.
5) a) Les points A', J et C sont-ils alignés ?
   b) Quelle est la position relative de la droite (OI) et du plan $(A'JC)$?
6) Déterminer le volume de la pyramide $OD'A'BC$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

$Q.2$) Construire un énoncé démontrant que les points A', J et C ne sont pas alignés en utilisant les théorèmes d'incidence de seconde.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.2$).
– deux énoncés d'exercices, variés par le niveau concerné et la méthode de résolution utilisée, se rapportant au thème : « **Problèmes de calculs de grandeurs : Calculs de longueurs, d'aires et de volumes** »

Sujet du 4 Juillet

Thème : Fonctions
Etude de recherche d'extremum et d'optimisation

1. L'exercice proposé au candidat

1) Pour tout réel α de $]0,2[$, on considère la fonction $x \mapsto g_\alpha(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-(x+\alpha)^2}$.

   a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de g_α.
   Montrer que la courbe représentative de g_α possède un axe de symétrie vertical.

   b) Montrer que pour tout x de $\mathcal{D}_\alpha$, on a $g''_\alpha(x) < 0$.
   En déduire que g_α admet un unique maximum en $x_0 = -\dfrac{\alpha}{2}$.

2) En utilisant g_α, montrer que l'aire maximale d'un trapèze de hauteur α (avec $0 < \alpha < 2$) inscrit dans un cercle de rayon 1 est égale à $\alpha\sqrt{4-\alpha^2}$ (en unités d'aire).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :

$Q.1)$ Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

$Q.2)$ Utiliser la calculatrice pour vérifier les résultats des questions 1 et 2 (sans que cela se substitue aux calculs « à la main »).

$Q.3)$ Quelle suite pourriez-vous donner à la question 2) ?

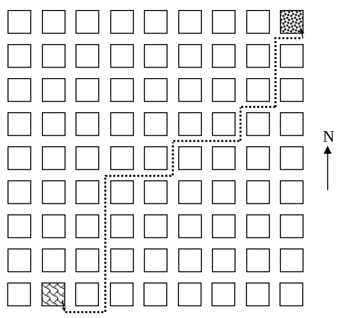
Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :
– Sa réponse à la question $Q.3)$.
– Deux exercices sur thème **« problèmes d'optimisation »**.

Sujet du 5 Juillet

Thème : Techniques de dénombrement

1. L'exercice proposé au candidat

Un homme travaille à Manhattan, dans un quartier où les avenues sont orientées nord-sud et les rues est-ouest. Il travaille à sept pâtés de maison à l'est et huit pâtés de maison au nord de son domicile. Pour aller à son travail chaque jour il parcourt donc la longueur de quinze pâtés de maison (il ne se dirige ni au sud ni à l'ouest).
On suppose qu'il existe une voie le long de chaque pâté de maisons et qu'il peut prendre n'importe lesquelles dans ce schéma rectangulaire. Le dessin ci-dessous illustre la situation ; un trajet a été représenté en pointillé.



1) Proposer un « codage » permettant de décrire le trajet représenté.
2) Combien de trajets différents l'homme peut-il emprunter ?
3) L'homme prétend que le nombre de trajets est aussi le nombre de suites de huit entiers naturels dont la somme est 8. A-t-il raison ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :

Q.1) À quel niveau pensez-vous pouvoir proposer cet exercice ? Quelles indications souhaiteriez-vous ajouter (questions intermédiaires, suggestion de représentations,. . .) ?

Q.2) La question 3) de l'exercice

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :
– Deux exercices sur le thème :**« Techniques de dénombrement »**

Sujet du 6 Juillet

Thème : Équations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue ou pouvant s'y ramener

1. L'exercice proposé au candidat

Elio et Nora s'arrêtent au magasin du coin de la rue et composent chacun un assortiment de friandises comportant des bonbons et des chewing-gums.
Les deux enfants se servent le même nombre de bonbons et Elio prend deux fois plus de chewing-gums que Nora. Un bonbon coûte 6 centimes d'euro, un chewing-gum 12 centimes d'euro. L'assortiment composé par Nora a une valeur de 1,20 euro. Elio a acheté 20 friandises.

1) Quelle peut être la composition de l'assortiment de Nora ?
2) On sait de plus qu'Elio a payé 1,68 euro. Quelle peut être la composition de l'assortiment de Nora ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les diverses étapes de la résolution de cet exercice (on pourra distinguer suivant le niveau de la classe).

Q.2) Indiquer les connaissances et savoir-faire mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice.

Q.3) Le nombre de solutions d'un problème se ramenant à la résolution d'une équation du premier ou du second degré à une inconnue est-il dépendant du choix de cette inconnue lorsque plusieurs possibilités sont envisageables ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

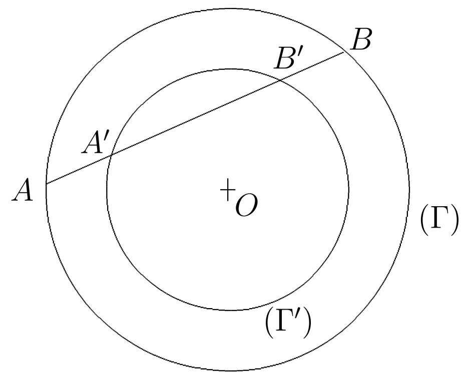
i) sa réponse à la question Q.2)

ii) l'énoncé d'exercices se rapportant au thème **«Équations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue ou pouvant s'y ramener »**.

Sujet du 7 Juillet

Thème : Problèmes de constructions
Constructions à l'aide de transformations

1. L'exercice proposé au candidat



Dans cet exercice on considère deux cercles concentriques (Γ) et (Γ'), de rayons respectifs r et r' avec $r > r'$ (figure ci-contre).
Le but de l'exercice est la construction d'une corde $[AB]$ de (Γ), coupant (Γ') en deux points A' et B', telle que :

$$AA' = A'B' = B'B$$

i) a) Justifier que le point A peut être choisi arbitrairement sur (Γ).
   b) Montrer que, pour toute corde $[AB]$ de (Γ) coupant (Γ') en deux points A' et B', on a $AA' = BB'$.

ii) On fixe un point A sur (Γ) et on note (Γ_1) l'image de (Γ) par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$.
   a) Montrer que, si une corde solution du problème existe, alors $A' \in (\Gamma_1) \cap (\Gamma')$.
   b) En déduire le nombre de cordes convenables menées de A (on discutera suivant les valeurs du rapport $\frac{r'}{r}$).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes utilisées dans cet exercice.

Q.2) Construire la figure de l'énoncé à l'aide du module de géométrie d'une calculatrice et indiquer des utilisations possibles de cette construction avec des élèves.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :
Deux exercices sur le thème : « **Problème de construction : Construction à l'aide de transformations** », dont l'un, au moins, utilisera une autre transformation que celle utilisée dans l'exercice proposé.

Sujet du 8 Juillet

Thème : Outils
Le calcul vectoriel et la géométrie analytique

1. L'exercice proposé au candidat

On considère dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\right)$ le cercle Γ de centre O et de rayon 1.
Soit A le point de coordonnées $(1; 0)$ et soit A' le point de coordonnées $(-1; 0)$.

1) Pour tout point H du segment $[AA']$, distinct de A et A', on mène la perpendiculaire Δ à la droite (AA'). La droite Δ coupe le cercle Γ en M et M'. On pose $\overrightarrow{OH} = x\ \vec{i}$.
Calculer, en fonction de x, l'aire du triangle AMM'.
2) Soit f la fonction numérique définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
Dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que le triangle, AMM', d'aire maximale est équilatéral.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les méthodes et les théorèmes utilisés dans cet exercice.

Q.2) Construire, à l'aide du module de géométrie d'une calculatrice, la figure proposée et conjecturer à l'aide de cette figure le résultat attendu.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

Deux exercices sur le thème : **« Le calcul vectoriel et la géométrie analytique. »**

Sujet du 12 Juillet

Thème : Outils
Le calcul vectoriel et la géométrie analytique

1. L'exercice proposé au candidat

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'ensemble $(\mathscr{S})$ défini par :

$$\mathscr{S} = \left\{ M(x, y, z) \in \mathscr{E};\ \ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0 \right\}$$

1) Montrer que $(\mathscr{S})$ est une sphère dont on donnera le centre et le rayon.
2) Montrer que le point $A(2, 2, -1)$ appartient à $(\mathscr{S})$ et déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P}_1)$ tangent à $(\mathscr{S})$ au point A.
3) a) Montrer que le plan $(\mathscr{P}_2)$ d'équation $x + y - z - 1 = 0$ coupe $(\mathscr{S})$.
   b) Déterminer le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ intersection de $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathscr{S})$.
   c) Déterminer les coordonnées du point Ω centre de $(\mathscr{C})$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Enoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.

Q.2) Rédiger un énoncé détaillé pour aider un élève de Terminale S à faire la question 3) c).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question Q.2).
- Les énoncés de deux exercices de géométrie analytique dont l'un au moins permet de résoudre un problème posé dans l'espace.

Sujet du 13 Juillet

Thème : Probabilités conditionnelles

1. L'exercice proposé au candidat

On considère un carré $ABCD$ et son centre de gravité Ω. On note $\mathcal{E} = \{A, B, C, D, \Omega\}$. Une puce se déplace aléatoirement en sautant d'un point de $\mathcal{E}$ à un autre. La seule contrainte est que si un saut relie deux sommets du carré, ceux-ci doivent être adjacents. À chaque saut, tous les déplacements possibles sont équiprobables. La puce ne reste pas deux fois de suite au même endroit.
Au départ (c'est-à-dire avant son premier saut) elle se trouve au point Ω.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note Ω_n l'événement « *la puce se trouve au point* Ω *à l'issue de son* n*-ième saut* ».
On définit de même les événements A_n, B_n, C_n, D_n. On notera $p_n = p(\Omega_n)$ (donc $p_0 = 1$).

1) Calculer p_1 et p_2.
2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier les égalités $p(A_n) = p(B_n) = p(C_n) = p(D_n) = \dfrac{1}{4}(1 - p_n)$.
3) Montrer que $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}(1 - p_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (utiliser la formule des probabilités totales).
4) En déduire que pour tout n on a $p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.

Q.2) Comment se généralise le problème si l'on remplace le carré $ABCD$ par un polygone à k sommets ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

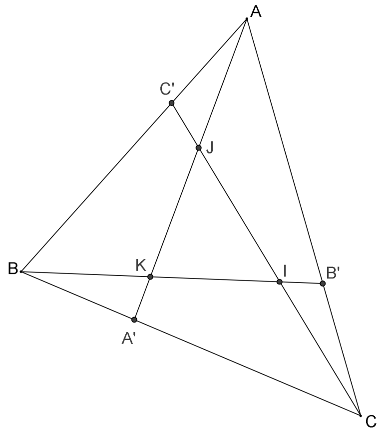
– Sa réponse à la question *Q*.2).
– Un ou deux exercices se rapportant au thème **« Probabilités conditionnelles »**.

Sujet du 14 Juillet

Thème : Outils
Les barycentres

1. L'exercice proposé au candidat

Soit ABC un triangle du plan.
Les points A', B' et C' sont respectivement définis par $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.
Les droites (AA') et (BB') se coupent en un point K, les droites (BB') et (CC') se coupent en un point I et les droites (AA') et (CC') en un point J.



1) Ecrire les points A', B' et C' comme barycentres des points A, B et C.
2) Montrer que le point I est barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 4)$.
3) Définir de même les points J et K comme barycentres des points A, B et C.
4) Montrer que les points I, J et K sont respectivement les milieux de $[CJ]$, $[AK]$, et $[BI]$.
5) En déduire une comparaison des aires des triangles BKJ, IJK, ABJ et AIJ et déterminer le rapport des aires des triangles ABC et IJK.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Enoncer les propriétés des barycentres utilisées dans cet exercice.

$Q.2$) Quelle réponse feriez-vous à un élève qui vous demanderait comment traiter la question 2) si les coefficients n'étaient pas fournis ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.1$).
– Les énoncés d'un ou plusieurs autres exercices, dans lesquels une étude barycentrique permet de mettre en évidence des propriétés géométriques, en variant les situations étudiées.

Sujet du 15 Juillet

Thème : Problèmes de constructions

1. L'exercice proposé au candidat

On considère deux droites parallèles d et δ et un point A n'appartenant ni à d ni à δ. Le but de l'exercice est de construire un triangle ABC rectangle isocèle en B tel que le point B appartienne à la droite d et que le point C appartienne à la droite δ .

1) Si une telle construction est réalisable, déterminer les similitudes directes de centre A qui transforment B en C.
2) Résoudre le problème posé. Combien y a-t-il de solutions ?
3) Reprendre l'exercice en supposant les droites d et δ sécantes.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Expliciter la démarche générale de résolution de ce problème.

Q.2) Quelles indications, ou questions supplémentaires ajouteriez-vous à l'énoncé pour le proposer à une classe ?

Q.3) Présenter à l'aide du module de géométrie dynamique de la calculatrice la figure comportant les solutions du problème lorsque les droites d et δ sont parallèles.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– sa réponse à la question Q.2) ;
– l'énoncé d'un exercice se rapportant au thème : **« problèmes de construction »**.

Sujet du 16 Juillet

Thème : La proportionnalité

1. L'exercice proposé au candidat

Pendant plusieurs siècles, on a utilisé et enseigné la règle de *fausse position.* L'encadré ci-dessous propose un extrait d'un ouvrage édité en 1784, consultable aujourd'hui sur le site de la Bibliothèque Nationale de France, expliquant cette règle.

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE
MATHÉMATIQUES.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Gottingue, & de l'Institut de Bologne; Profeſſeur de Mathématiques au Collége Mazarin.*

265. *La regle de fauſſe poſition* ſert à trouver un nombre inconnu par le moyen d'un nombre ſuppoſé. Soit propoſé, par exemple, de trouver un nombre dont la moitié, le quart & le cinquieme faſſent 456.

Je ſuppoſe que ce nombre eſt 20. Mais il eſt clair que la moitié, le quart & le cinquieme de 20 ne font que 19. Ma ſuppoſition eſt donc fauſſe. Elle n'en ſervira pas moins cependant à me faire connoître le nombre demandé. Car puiſque deux quantités ſont toujours entre elles comme leurs parties ſemblables (242), on peut les regarder l'une comme la ſomme des antécédents d'une ſuite de termes proportionels, l'autre comme la ſomme des conſéquents. Or ces deux ſommes ſont entre elles (241), comme un nombre quelconque d'antécédents eſt au même nombre de conſéquents, & réciproquement; donc la moitié plus le quart, plus le cinquieme de 20, ſont à la moitié, plus au quart, plus au cinquieme du nombre que je cherche, comme le nombre 20 lui-même eſt au nombre cherché. J'ai donc, $19 : 456 :: 20 : x = 480$.

En utilisant la typographie actuelle

Proposition 265. La règle de fausse position sert à trouver un nombre inconnu par le moyen d'un nombre supposé. Soit proposé, par exemple, de trouver un nombre dont la moitié, le quart et le cinquième fassent 456.
Je suppose que ce nombre est 20. Mais il est clair que la moitié, le quart et le cinquième de 20 ne font que 19. ma supposition est donc fausse. Elle n'en servira pas moins cependant à me faire connaître le nombre demandé. Car puisque deux quantités sont toujours entre elles comme leurs parties semblables (Proposition 242), on peut les regarder l'une comme la somme des antécédents d'une suite de termes proportionnels, l'autre comme la somme des conséquents. Or ces deux sommes sont entre elles (Proposition 241), comme un nombre quelconque d'antécédents est au même nombre de conséquents et réciproquement ; donc la moitié plus le quart, plus le cinquième de 20 sont à la moitié plus le quart, plus au cinquième du nombre que je cherche, comme le nombre 20 est lui même au nombre cherché.
J'ai donc, $\dfrac{19}{456} = \dfrac{20}{x}$ soit $x = 480$.

1) Résoudre le problème posé : « trouver un nombre dont la moitié, le quart et le cinquième fassent 456 ».
2) Le nombre 20 a-t-il été choisi au hasard ? Le résultat trouvé dépend-il de ce choix ?
3) L'auteur fait référence à deux propriétés établies auparavant (numérotées 242 et 241). la première citée (242) :« Deux quantités sont toujours entre elles comme leurs parties semblables » peut se traduire aujourd'hui par l'égalité : $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$. Quelle propriété des tableaux de proportionnalité peut traduire la seconde ?
4) En appliquant cette méthode, trouver la solution du problème posé par Fancès Pellos gentilhomme niçois de la fin du XV^{e}siècle : « *Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et 9 paumes à l'extérieur. Je te demande combien elle a de long ?* ».

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Quelles sont les propriétés sur lesquelles repose la « règle de la fausse position » ?

Q.2) Quelle classe de problèmes cette règle permet-elle de résoudre ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

Divers exercices sur le thème « **La proportionnalité** ». On veillera à ce que ce choix recouvre diverses classes de l'enseignement secondaire.

Sujet du 17 Juillet

Thème : Fonctions
Etude du comportement local

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\cos x}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \mathbb{I}, \mathbb{J})$ du plan.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine O du repère.

1) a) Déterminer l'équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a de $[0, \pi]$.

   b) Montrer que T_a passe par O si et seulement si $a \sin a = 1$.

2) Soit la fonction ψ définie sur $]0, \pi]$ par $\psi(x) = \sin x - \dfrac{1}{x}$.

   a) Étudier les variations de ψ' sur $]0, \pi]$.

   b) En déduire que la fonction ψ admet un maximum absolu M qu'elle atteint en un unique x_0 de l'intervalle $]0, \pi]$.

   c) Calculer $\psi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et en déduire la position de $\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à x_0.

   d) Calculer $\psi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et en déduire le signe de M.

3) À l'aide des questions précédentes, déterminer le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ qui passent par O.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1)$ Dégager les outils et les méthodes nécessaires à la résolution de cet exercice.

$Q.2)$ A l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée des coordonnées des points où la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par O. Tracer $\mathcal{C}_f$ et les tangentes en question.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.1)$.

– Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème « **Fonctions** ».

Sujet du 18 Juillet

Thème : Intégration
Calcul d'intégrales par des méthodes variées

1. L'exercice proposé au candidat

1) Vérifier que pour tout x réel :

$$\frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x}$$

2) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$.

3) Déterminer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{(1+e^x)}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Enoncer les résultats fondamentaux pour le calcul des intégrales mis en jeu dans l'exercice précédent.

Q.2) Quelle réponse feriez-vous à un élève qui vous demanderait comment calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)^4}$?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :
– sa réponse à la question *Q.2)*
– d'autres exercices sur le thème **« Calculs d'intégrales par des méthodes variées »**

Sujet du 19 Juillet

Thème : Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence,...)

1. L'exercice proposé au candidat

On se propose ici d'illustrer une figure du raisonnement mathématique : le raisonnement par l'absurde.

On se donne une partie A de $\mathbb{N}^*$, finie et non vide.
On suppose que pour tous éléments m et n de A, l'entier $\dfrac{m+n}{\operatorname{pgcd}(m,n)}$ est encore dans A.

1) Montrer que l'entier 2 est élément de A.
2) Montrer que l'ensemble fini A ne contient que des entiers pairs.
3) Montrer que l'ensemble A se réduit au singleton $\{2\}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :

$Q.1)$ Dégager les outils et méthodes nécessaires à la résolution de l'exercice.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera au moins deux exercices illustrant le raisonnement par l'absurde, ou par contraposition, ou par « analyse-synthèse ». A cet effet, il puisera dans les domaines de la géométrie, de l'analyse, des probabilités...

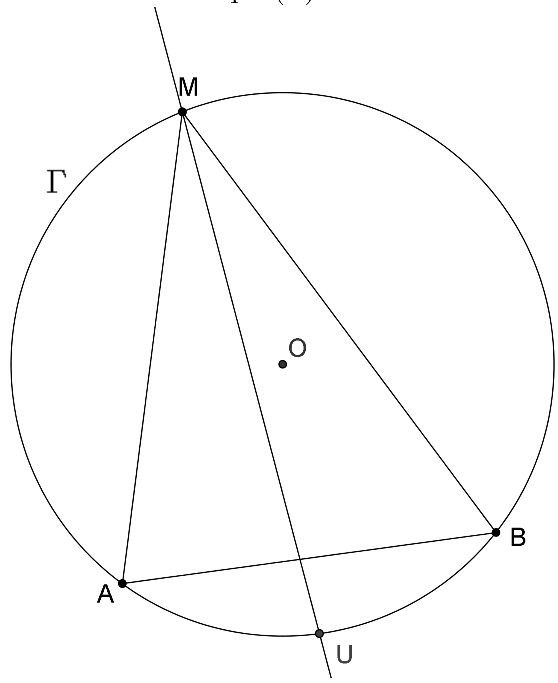
Sujet du 20 Juillet

Thème : Problèmes de constructions

Constructions utilisant des configurations connues

1. L'exercice proposé au candidat

Soit (Γ) un cercle de centre O et $[AB]$ une corde de (Γ). Soit M un point de (Γ), distinct de A et de B. La bissectrice de $\widehat{AMB}$ coupe (Γ) en U.



1) A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la figure. Quelle conjecture peut-on faire sur le point U et sur le triangle AUB lorsque M décrit un arc de cercle d'extrémités A et B ?
2) Démontrer cette conjecture et préciser la position de U.
3) Soit (Γ) un cercle de centre O, $[AB]$ une corde de (Γ) et N un point de $]AB[$. Construire un triangle ABC tel que $C \in (\Gamma)$ et tel que la bissectrice de $\widehat{ACB}$ passe par N.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Présenter la figure réalisée sur la calculatrice et l'animation permettant de mettre en évidence la conjecture.

Q.2) Dégager les propriétés mises en jeu dans la résolution de l'exercice et indiquer à quel niveau on peut le proposer.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question $Q.1$).
- plusieurs énoncés d'exercices, variés, de constructions de triangles vérifiant des conditions métriques ou géométriques.

Sujet du 21 Juillet

Thème : Outils
Le calcul vectoriel et la géométrie analytique

1. L'exercice proposé au candidat

On considère dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\right)$ le cercle Γ de centre O et de rayon 1.
Soit A le point de coordonnées $(1; 0)$ et soit A' le point de coordonnées $(-1; 0)$.

1) Pour tout point H du segment $[AA']$, distinct de A et A', on mène la perpendiculaire Δ à la droite (AA'). La droite Δ coupe le cercle Γ en M et M'. On pose $\overrightarrow{OH} = x\ \vec{i}$. Calculer, en fonction de x, l'aire du triangle AMM'.
2) Soit f la fonction numérique définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$. Dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que le triangle, AMM', d'aire maximale est équilatéral.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les méthodes et les théorèmes utilisés dans cet exercice.

$Q.2$) Construire, à l'aide du module de géométrie d'une calculatrice, la figure proposée et conjecturer à l'aide de cette figure le résultat attendu.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

Deux exercices sur le thème : **« Le calcul vectoriel et la géométrie analytique. »**
